Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2016 12 22, 08.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Mattias Lennartsson, 031-7725325

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. a) Använd residykalkyl för att beräkna Fouriertransformen av
$$f(t) := \frac{t}{(t^2+1)(t^2+9)}.$$
(6p)

   b) Använd resultatet i (a) för att bestämma
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t \sin t}{(t^2+1)(t^2+9)} dt.$$
(1p)

2. Bestäm antalet lösningar till ekvationen $z^5 + 4z^3 = e^{iz}$ i området $\{z : 1 < |z| < 3\}$. (7p)

3. a) Beräkna Laplacetransformen av
$$f(t) := \int_0^t \sin u \cos(t-u) du.$$
(3p)

   b) Använd (a) för att bestämma $f(t)$ explicit. (4p)

4. Låt S vara cirkelsektorn $S := \{z : 0 < |z| < \sqrt{2}, 0 < Arg(z) < \pi/4\}$. Bestäm bilden av S under avbildningen
$$f(z) := \frac{z^2+1}{z^2+2}.$$
(Tips: notera att $f(z)$ är sammansatt av z^2 och $\frac{z+1}{z+2}$.) (7p)

5. Antag att Laurentserien $f(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-1)^k$ konvergerar i området $\{z : 1 < |z-1| < 5\}$. Bestäm
$$\int_{|z|=3} \frac{f(z)}{z^2(z-1)^2} dz.$$
(7p)

6. Formulera och bevisa Cauchys integralformel (för funktionen och inte dess derivata). (5p)

7. Låt f vara holomorf i den punkterade cirkelskivan $\{z : 0 < |z| < 1\}$. Definiera vad som menas med att f:s singularitet i 0 är i) hävbar, ii) en pol, eller iii) väsentlig. Bevisa att singulariteten är hävbar om och endast om
$$\lim_{z \to 0} z f(z) = 0.$$
(5p)

8. Låt $f(z)$ vara en hel funktion (dvs holomorf på hela $\mathbb{C}$). Antag att $|f(z)| \leq (1+|z|)^k$ för ett givet $k \in \mathbb{N}$. Visa att $f(z)$ är ett polynom i z, och att dess grad är högst k.
(5p)

Lycka till!
David