1 Tenta i komplex analys, F/ Kf och TM, MVE 025 och MVE 295

2016 01 07, 08.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Gustav Kettil 0703-088304

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39(4), 40-50 (5)

---

1. Använd residykalkyl till att beräkna integralen
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+6x+10} dx.$$
(7p)

2. Låt
$$f(z) = \frac{z}{(\sin z)^2}.$$
   a. Vilken ordning har f:s pol i origo? (1p)
   b. Bestäm de första nollskilda termerna i f:s Laurentserieutveckling i $\{|z| < \pi\}$.
   (2 termer: 4p, 3 termer 5p)
   c. Vad är residyn till f i origo? (1p)

3. Visa att ekvationen $z^4 - 5z^2 + 3 = e^{-z}$ inte har några lösningar på imaginära axeln (2p). Hur många lösningar har ekvationen i högra halvplanet? (5p)

4. Lös med hjälp av Laplacetransformering begynnelsevärdesproblemet
$$u'' + u' - 2u = f(t), t > 0,$$
där f är en funktion som uppfyller $|f(t)| \leq Ce^{At}$ för $t > 0$, och $u'(0) = 2, u(0) = -1$. (Svara med en faltning.)
(7p)

5. Avbilda konformt området $\{|z| > 1; 0 < Arg(z) < \pi/2\}$ på övre halvplanet.
(7p)

6. Formulera och bevisa Liouvilles sats. (5p)

7. Visa Cauchys formel (för funktionen, inte för derivatan!)
(5p)

8. Låt $p(z)$ vara ett polynom av grad N, och antag att $|p(z)| = 1$ då $|z| = 1$. Visa att $p(z) = az^N$ där $|a| = 1$. (Ledning: Låt $q(z) = z^N \overline{p(1/\bar{z})}$. Visa att $q(z)$ är ett polynom. Visa sen att $p(z)q(z) = z^N$ då $|z| = 1$ och att q är konstant.)
(5p)

Lycka till!,
BB