Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2017 10 26, 8.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Mattias Lennartsson, 031-7725325

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. a) Använd residykalkyl för att beräkna Fouriertransformen av funktionen
$$\frac{1}{x^2+7}.$$
(5p)

   b) Använd resultatet i a) för att bestämma Fouriertransformen av funktionen
$$\frac{\cos x}{x^2+7}.$$
(2p)

2. Låt
$$f(z) := \frac{1+e^z}{1-e^z}$$
och $A := \{z : \mathrm{Re}(z) < 0, -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$. Bestäm bilden $f(A)$.
(Tips: använd att $f(z) = M(e^z)$ där $M(z) := \frac{1+z}{1-z}$.) (7p)

3. a) Använd Laplacetransformen för att ge en lösningsformel för begynnelsevärdesproblemet:
$$u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = f(t), \qquad t \geq 0, \qquad u(0) = 1, \qquad u'(0) = 0,$$
där f är en given funktion sådan att $|f(t)| \leq Ae^{B}t$ för några $A, B \in \mathbb{R}$. (5p)

   b) Bestäm lösningen u explicit (dvs inga integraler i uttrycket) när f ges av $f(t) = 1$ för $0 \leq t \leq 2\pi$ medan $f(t) = 0$ för $t > 2\pi$. (2p)

4. Bestäm antalet nollställen till polynomet $p(z) = z^4 - 4z + 1$ i området $G := \{z : 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$. (7p)

5. Beräkna integralerna:

   a)
$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} dz,$$
(4p)

   b)
$$\int_{|z|=3} \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} dz.$$
(3p)

6. Formulera satsen om klassifikation av nollställen. Bevisa satsen i specialfallet att funktionen är holomorf i enhetsskivan $D(0,1)$ med nollställe i punkten 0. (5p)

7. Formulera och bevisa Rouchés sats. (5p)

8. Visa att $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ definierar en holomorf funktion i halvplanet $\{z : \mathrm{Re}(z) > 1\}$ (kom ihåg att $n^z := e^{z \ln n}$). ($\zeta(z)$ är känd som Reimanns zeta-funktion.) (5p)

Lycka till!
David