Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2, med lösningar och rättningsmall

2017 10 26, 8.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Mattias Lennartsson, 031-7725325

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. a) Använd residykalkyl för att beräkna Fouriertransformen av funktionen

$$\frac{1}{x^2+7}.$$

(5p)

b) Använd resultatet i a) för att bestämma Fouriertransformen av funktionen

$$\frac{\cos x}{x^2+7}.$$

(2p)

Lösning: a) Låt

$$f(x) := \frac{1}{x^2+7},$$

då har vi enligt definition att

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{x^2+7} dx. \qquad (0.5p)$$

Vi sätter

$$g(z) := \frac{e^{-itz}}{z^2+7}.$$

Vi vet då att

$$\hat{f}(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} g(z)dz. \qquad (0.5p)$$

Vi antar först att $t \leq 0$. Låt $\gamma_R(s) := Re^{is}$, $s \in [0,\pi]$ samt $\sigma_R := [-R,R] \cup \gamma_R$ som då är en sluten kurva. Vi har att

$$\left| \int_{\gamma_R} gdz \right| \leq \max_{z\in\gamma_R} \left| \frac{e^{-itz}}{z^2+7} \right| |\gamma_R| \leq \frac{\pi R}{R^2-7} \longrightarrow 0$$

då $R \to \infty$ (1.5p). Här använde vi först triangelolikheten för integraler, sedan att $|e^{-itz}| = e^{ty} \leq 1$ på γ_R samt att $|z^2+7| \geq |z|^2 - 7 = R^2 - 7$ på γ_R tack vare den omvända triangelolikheten. Detta implicerar att

$$\hat{f}(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} gdz.$$

Vi noterar nu att $z^2 + 7 = (z + i\sqrt{7})(z - i\sqrt{7})$ så $g(z)$ är holomorf i $\mathbb{C}$ förutom isolerade singulariteter i $\pm i\sqrt{7}$, där bara $i\sqrt{7}$ ligger i det inre av $\sigma R, R > \sqrt{R}$. Enligt räkneregler för residyer har vi att

$$Res_{i\sqrt{7}} g = \left(\frac{e^{-itz}}{z + i\sqrt{7}} \right)_{|z=i\sqrt{7}} = \frac{e^{\sqrt{7}t}}{2i\sqrt{7}}. \qquad (1p)$$

Residysatsen säger nu att

$$\int_{\sigma_R} g dz = 2\pi i Res_{i\sqrt{7}} g = \frac{\pi e^{\sqrt{7}t}}{\sqrt{7}},$$

så sammantaget får vi att för $t \leq 0$ är

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{\sqrt{7}t}}{\sqrt{7}}. \qquad (0.5p)$$

Eftersom f är reellvärd gäller räkneregeln

$$\hat{f}(t) = \overline{\hat{f}(-t)}$$

så vi får att för $t \geq 0$ är

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{-\sqrt{7}t}}{\sqrt{7}}.$$

Sammantaget får vi därför att

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{-\sqrt{7}|t|}}{\sqrt{7}}. \qquad (1p)$$

b) Låt $h(x) := f(x) \cos x$. Eftersom

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

får vi att

$$\hat{h}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} e^{-itx} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(t-1)x} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(t+1)x} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \hat{f}(t-1) + \frac{1}{2} \hat{f}(t+1) = \frac{\pi}{2\sqrt{7}} (e^{-\sqrt{7}|t-1|} + e^{-\sqrt{7}|t+1|}). \qquad (2p)$$

Svarade man

$$\frac{\pi}{\sqrt{7}} e^{-\sqrt{7}|t-1|}$$

eller

$$\frac{\pi}{2\sqrt{7}} (e^{-\sqrt{7}|t-i|} + e^{-\sqrt{7}|t+i|})$$

ger det cirka 1p.

2. Låt
$$f(z) := \frac{1+e^z}{1-e^z}$$
och $A := \{z : \text{Re}(z) < 0, -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$. Bestäm bilden $f(A)$.
(Tips: använd att $f(z) = M(e^z)$ där $M(z) := \frac{1+z}{1-z}$.) (7p)

Lösning: Vi noterar att $|e^z| = e^x$ samt att $Arg(z) = y + 2\pi k$ där $k \in \mathbb{Z}$ är valt sådant att $Arg(z) \in (-\pi, \pi]$. Det följer att bilden av A under avbildningen e^z blir
$$B := \{z : 0 < |z| < 1, -\pi < Arg(z) < \pi\} = D(0,1) \setminus (-1, 0], \qquad (2p).$$
($e^A = D(0,1)$ ger ca 1.5p)

Vi har att $f(A) = M(B)$ där $M(z) := \frac{1+z}{1-z}$ är en Möbiusavbildning (0.5p). Vi noterar att $M(-1) = 0, M(0) = 1, M(1) = \infty$. Enligt sats avbildar Möbiusavbildningar linjer och cirklar på linjer och cirklar. Vi får därför att $M(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (0.5p). $M((-1,0])$ måste dåvara en del av den reella axeln som förbinder punkerna 0 och 1. $M((-1,0])$ innehåller inte oÃď'ndlighetspunkten, så vi får att $M((-1,0]) = (0,1]$ (0.5p).

Dessutom avbildas enhetscirkeln på en cirkel eller linje som går genom 0 och ∞, dvs en linje genom origo. Eftersom enhetscirkel skär den reella axeln i rät vinkel i punkten -1 och Möbiusavbildningar enligt sats är konforma måste $M(C(0,1))$ skära den reella axeln i rät vinkel i origo, vilket implicerar att $M(C(0,1)) = i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (2p). Då $M(0) = 1$ följer det att $M(D(0,1)) = \{z : Re(z) > 0\}$ (1p). Eftersom M är en bijektion får vi slutligen att
$$f(A) = M(B) = M(D(0,1)) \setminus M((-1,0]) = \{z : Re(z) > 0\} \setminus (0,1], \qquad (0.5p).$$

Om man ej förklarar hur man använder Möbiusavbildningars egenskaper dras 0.5p. Om $f(A) \neq M(B)$ dras 1p. En korrekt lösning förutom misstaget $e^A = D(0,1)$ ger 5p. Om man räknade som om f var en Möbiusavbildning gavs i allmÃď'nhet inga poÃď'ng.

3. a) Använd Laplacetransformen för att ge en lösningsformel för begynnelsevärdesproblemet:
$$u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = f(t), \qquad t \geq 0, \qquad u(0) = 1, \qquad u'(0) = 0,$$
där f är en given funktion sådan att $|f(t)| \leq Ae^Bt$ för några $A, B \in \mathbb{R}$. (5p)

b) Bestäm lösningen u explicit (dvs inga integraler i uttrycket) när f ges av $f(t) = 1$ för $0 \leq t \leq 2\pi$ medan $f(t) = 0$ för $t > 2\pi$. (2p)

Lösning: a) Laplacetransformen av ekvationen ger att
$$(s^2 + 2s + 2)\tilde{u} = \tilde{f} + s + 2,$$
vilket vi skriver om som
$$\tilde{u} = \frac{\tilde{f}}{(s+1)^2+1} + \frac{s+2}{(s+1)^2+1} \qquad (1.5p)$$
$$= \frac{\tilde{f}}{(s+1)^2+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1}. \qquad (0.5p)$$

Enligt räkneregler för LT har vi att

$$\mathcal{L}(e^{-t}\sin t) = \frac{1}{(s+1)^2+1}, \qquad (1p)$$

$$\mathcal{L}(e^{-t}\cos t) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}, \qquad (1p)$$

samt

$$\mathcal{L}(e^{-t}\sin t * f) = \mathcal{L}(e^{-t}\sin t)\mathcal{L}(f) = \frac{\tilde{f}}{(s+1)^2+1}. \qquad (0.5p)$$

Vi får alltså att $\tilde{u} = \mathcal{L}(e^{-t}\sin t * f + e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)$ och det följer då från inversionsformeln att

$$u = e^{-t}\sin t * f + e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t. \qquad 0.5p$$

Alternativt ger en korrekt PBU av $\frac{1}{(s+1)^2+1}$ samt $\frac{s+2}{(s+1)^2+1}$ 1p,

$$\mathcal{L}(e^{(-1-i)t}) = \frac{1}{s+1+i}, \qquad (0.5p)$$

$$\mathcal{L}(e^{(-1+i)t}) = \frac{1}{s+1-i}, \qquad (0.5p)$$

samt

$$\mathcal{L}(e^{(-1\pm i)t} * f) = \frac{\tilde{f}}{s+1\mp i}, \qquad (0.5p)$$

$$u = \frac{i}{2}(e^{(-1-i)t} - e^{(-1+i)t}) * f + \frac{1+i}{2}e^{(-1-i)t} + \frac{1-i}{2}e^{(-1+i)t}, \qquad 0.5p$$

vilket slutligen ger

$$u = e^{-t}\sin t * f + e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t. \qquad 0.5p$$

b) Per definition är faltningen $e^{-t}\sin t * f$ givet av:

$$(e^{-t}\sin t * f)(t) := \int_0^t e^{-r}\sin r f(t-r)dr. \qquad (0.5p)$$

Då $0 \leq t \leq 2\pi$ får vi för vår givna funktion f att

$$\int_0^t e^{-r}\sin r f(t-r)dr = \int_0^t e^{-r}\sin r dr = \left[-\frac{e^{-r}}{2}(\sin r + \cos r)\right]_0^t = -\frac{e^{-t}}{2}(\sin t + \cos t) + \frac{1}{2},$$

där vi använde att $-(e^{-t}/2)(\sin t + \cos t)$ är en primitiv funktion till $e^{-t}\sin t$ (hittas mha partiell integration) (1p). Då $t \geq 2\pi$ får vi istället att

$$\int_0^t e^{-r}\sin r f(t-r)dr = \int_{t-2\pi}^t e^{-r}\sin r dr = \left[-\frac{e^{-r}}{2}(\sin r + \cos r)\right]_{t-2\pi}^t =$$

$$= \frac{e^{2\pi}-1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t). \qquad (0.5p)$$

Sammansatt betyder detta att

$$u(t) = \frac{e^{-t}}{2}(\sin t + \cos t) + \frac{1}{2} \qquad \text{då} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

medan

$$u(t) = \frac{e^{2\pi}+1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t) \qquad \text{då} \qquad t \geq 2\pi.$$

4. Bestäm antalet nollställen till polynomet $p(z) = z^4 - 4z + 1$ i området $G := \{z : 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$. (7p)

Lösning: Vi hittar först antalet nollställen i högra halvplanet. Låt $\gamma_R(t) := Re^{it}, t \in [-\pi/2, \pi/2]$ och $\sigma_R := [iR, -iR] \cup \gamma_R$. Vi ser att

$$p(Re^{it}) = R^4 \left(e^{4it} - \frac{4i}{R^3} + \frac{1}{R^4} \right)$$

så $arg(p(Re^{it})) \approx 4t + 2\pi k$ för stora R vilket implicerar att $argvar(f(\gamma_R)) \approx 4\pi$ för stora R (1p). Vi har också att

$$p(iy) = y^4 + 1 + i(-4y).$$

Speciellt får vi att

$$p(iR) = R^4 + 1 - 4iR$$

så $arg(p(iR)) \approx 0 + 2\pi k_1$ och vi ser också att $p(iR)$ ligger i nedre halvplanet. Vidare ser vi att

$$p(-iR) = R^4 + 1 + 4iR$$

så $arg(p(-iR)) \approx 0 + 2\pi k_2$ och vi ser också att $p(-iR)$ ligger i övre halvplanet. Då $Im(p(iy)) = 0$ omm $y = 0$ ser vi att kurvan $p([iR, -iR])$ endast passerar x-axeln i punkten 1. Detta betyder dels att $p \neq 0$ på den imaginära axeln, samt att kurvan $p([iR, -iR])$ ej kan gå runt 0 när den går från $p(iR)$ till $p(-iR)$ (visas bäst med figur). Detta implicerar att $argvar(p([iR, -iR])) \approx 0$ (2p). Vi får att

$$W(p(\sigma_R)) = \frac{1}{2\pi} argvar(p(\sigma_R)) = \frac{1}{2\pi}(argvar(p(\gamma_R) + argvar(p([iR, -iR]))) \approx 2$$

för stora R. Men vindningstal är heltal så vi får att för stora R är

$$W(p(\sigma_R)) = 2.$$

Argumentprincipen säger då att p har 2 nollstÃd'llen i $int(\sigma_R)$ för stora R, dvs p har 2 nollställen i det öppna högra halvplanet.

Nu ska vi hitta antalet nollställen i $\{z : Re(z) \geq 1\}$. Låt $\gamma'_R(t) := Re^{it} + 1, t \in [-\pi/2, \pi/2]$ och $\sigma'_R := [1 + iR, 1 + -iR] \cup \gamma_R$. Först noterar vi att

$$p(z + 1) = z^4 + 4z^3 + 6z^2 - 2.$$

Detta ger att

$$p(Re^{it} + 1) = R^4 \left(e^{4it} + \frac{4}{R} e^{3it} + \frac{6}{R^2} e^{2it} - \frac{2}{R^4} \right)$$

så $arg(p(Re^{it} + 1)) \approx 4t + 2\pi k$ för stora R vilket implicerar att $argvar(f(\gamma'_R)) \approx 4\pi$ för stora R (0.5p). Vi har också att

$$p(1 + iy) = y^4 - 6y^2 - 2 + i(-4y^3).$$

Speciellt får vi att

$$p(1 + iR) = R^4 - 6R^2 - 2 + i(-4R^3)$$

så $arg(p(1+iR)) \approx 0 + 2\pi k_3$ och vi ser också att $p(1+iR)$ ligger i nedre halvplanet. Vidare ser vi att

$$p(1-iR) = R^4 - 6R^2 - 2 + i4R^3$$

så $arg(p(1-iR)) \approx 0 + 2\pi k_4$ och vi ser också att $p(1-iR)$ ligger i övre halvplanet. Då $Im(p(1+iy)) = 0$ omm $y = 0$ ser vi att kurvan $p([1+iR, 1-iR])$ endast passerar x-axeln i punkten -2. Detta betyder dels att $p \neq 0$ på linjen $\{z : Re(z) = 1\}$, samt att kurvan $p([1+iR, 1-iR])$ går runt 0 en gång i negativ riktning när den går från $p(1+iR)$ till $p(1-iR)$ (visas bäst med figur). Detta implicerar att $argvar(p([1+iR, 1-iR])) \approx -2\pi$ (2p). Vi får att

$$W(p(\sigma'_R)) = \frac{1}{2\pi} argvar(p(\sigma'_R)) = \frac{1}{2\pi}(argvar(p(\gamma'_R) + argvar(p([1+iR, 1-iR]))) \approx 1$$

för stora R. Men vindningstal är heltal så vi får att för stora R är

$$W(p(\sigma'_R)) = 1.$$

Argumentprincipen säger då att p har 1 nollställen i $int(\sigma'_R)$ för stora R, dvs p har 1 nollställe i det öppna halvplanet $\{z : Re(z) > 1\}$. Eftersom vi såg att p inte hade några nollställen på linjen $\{z : Re(z) = 1\}$ får vi att antalet nollställen i G är lika med antalet nollställen i det öppna högra halvplanet minus antalet nollställen i det öppna halvplanet $\{z : Re(z) > 1\}$ (1.5p), dvs p har ett nollställe i G.

Alternativt kunde man exempelvis räkna ut argumentvariationen av $p(\gamma)$ där $\gamma := [-iR, 1-iR] \cup [1-iR, 1+iR] \cup [1+iR, iR] \cup [iR, -iR]$, med liknande poängsättning.

Om man ej hänvisade till argumentprincipen drogs 1p. Om man visade $arg(p(iR)) \approx 0 + 2\pi k_1$ och $arg(p(-iR)) \approx 0 + 2\pi k_2$ men ej förklarade varför $argvar(p([iR, -iR])) \approx 0$ gavs 0.5p, och samma sak för $argvar(p[1+iR, 1-iR])$.

5. Beräkna integralerna:

a)

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} dz,$$

(4p)

b)

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} dz.$$

(3p)

Lösning: a) $f(z) := \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2}$ är holo i $\mathbb{C}$ förutom isolerade singulariteter i punkterna 0 och 2. Av dessa ligger endast 0 i det inre av $C(0,1)$. Notera att

$$\sin(1/z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - ... = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{-2m-1} \qquad (0.5p)$$

i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Vi utvecklar

$$\frac{1}{z-2} = -\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} z^k \qquad (0.5p)$$

och därför

$$\frac{1}{(z-2)^2} = -\left(\frac{1}{z-2}\right)' = \sum_{1}^{\infty} \frac{k+1}{2^{k+2}} z^k. \qquad (1p)$$

Sammantaget får vi

$$\frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{-2m-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2^{k+2}} z^k\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l z^l,$$

där (eftersom $z^{-2m-1}z^k = z^{-1}$ omm $k = 2m$)

$$c_{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \frac{2m+1}{2^{2m+2}} = \qquad (1.5p)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \frac{1}{4}\cos(1/2).$$

Alltså är

$$Res_0\left(\frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2}\right) = \frac{1}{4}\cos(1/2)$$

och Residysatser ger oss därför att

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} dz = 2\pi i Res_0\left(\frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2}\right) = \frac{\pi i}{2}\cos(1/2). \qquad (0.5p)$$

b) Båda singulariteterna 0 och 2 ligger i $C(0,3)$. Enligt räkneregel för residyer har vi

$$Res_2\left(\frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2}\right) = \sin(1/z)'_{|z=2} = -\left(\frac{\cos(1/z)}{z^2}\right)_{|z=2} = -\frac{1}{4}\cos(1/2). \qquad (2p)$$

Residysatser ger oss därför att

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} dz = 2\pi i\left(Res_0\left(\frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2}\right) + Res_2\left(\frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2}\right)\right) = 0. \qquad 1p$$

Alternativ lösning av b) är att notera att Cauchys sats ger att

$$\int_{|z|=R} \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} dz$$

är oberoende av R då$R > 2$, samt att man kan visa att integralen går mot noll då$R \to \infty$ (mha triangelolikheten för integraler).

En felaktig beräkning av $Res_0\left(\frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2}\right)$ påverkar i allmänhet inte poängen på b)-delen, men om man (felaktigt) använder Cauchy's integralformel i b) ges max 1p.

6. Formulera satsen om klassifikation av nollställen. Bevisa satsen i specialfallet att funktionen är holomorf i enhetsskivan $D(0,1)$ med nollställe i punkten 0. (5p)

   Lösning: Se bok eller föreläsningsanteckningar.

Korrekt formulering ger 2p. Om man inte ger den allmänna formuleringen av satsen dras 0.5p. Om man inte skriver $m \geq 1$ dras 0.5p. Om man inte skriver $g(z_0) \neq 0$ dras 0.5p osv.

Korrekt bevis ger 3p. Fullständig härledning av fall ii) givet att det finns k sa $c_k \neq 0$ ger 2p. Härledning av fall i) när så ej är fallet ger 1p.

7. Formulera och bevisa Rouchés sats. (5p)

   Lösning: Se bok eller föreläsningsanteckningar.

   Korrekt formulering ger 2p. Om man ej skriver att olikheten $|f| > |g|$ ska gälla på kurvan γ dras 1.5p.

   Korrekt bevis ger 3p. Visar man via omvända triangelolikheten att $f \circ \gamma$ och $(f+g) \circ \gamma$ är homotopa i $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ges 1.5p. Om man ej noterar att homotopin gäller just i $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ dras 1p. Visar man hur detta till en likhet mellan vindningstalen ges 1p. Hänvisar man till argumentprinciper för att dra slutsatsen att $N(f+g,\gamma) = N(f,\gamma)$ ges 0.5p.

8. Visa att $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ definierar en holomorf funktion i halvplanet $\{z : \text{Re}(z) > 1\}$ (kom ihåg att $n^z := e^{z \ln n}$). ($\zeta(z)$ är känd som Reimanns zeta-funktion.) (5p)

   Lösning: Vi noterar att $|\frac{1}{n^z}| = \frac{1}{n^x}$. Vi vet också (via t ex integralkriteriet) att $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^x}$ är konvergent för alla $x > 1$. Eftersom en absolutkonvergent serie är konvergent följer det att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ är konvergent i halvplanet $\{z : \text{Re}(z) > 1\}$ (1p), och definierar därför en funktion $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ där.

   Låt $a > 1$. På $\{z : Re(z) \geq a\}$ får vi att

$$|\sum_{1}^{N} \frac{1}{n^z} - \zeta(z)| = |\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^z}| \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{Re(z)}} \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \longrightarrow 0$$

   då $N \to \infty$, dvs serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ konvergerar likformigt på $\{z : Re(z) \geq a\}$ (1p). Varje enskild term $1/n^z$ är kontinuerlig i z såenligt sats är $\zeta(z)$ kontinuerlig på $\{z : Re(z) \geq a\}$ (0.5p). Låt nu γ vara en styckvist glatt sluten kurva i $\{z : Re(z) > a\}$. Eftersom $\sum_1^N \frac{1}{n^z}$ konvergerar likformigt mot $\zeta(z)$ på$\{z : Re(z) \geq a\}$ kan vi enligt sats föra ut summationen från integralen:

$$\int_{\gamma} \zeta(z) dz = \sum_{1}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{1}{n^z}. \qquad (1p)$$

   Varje enskild term $1/n^z$ är holomorf i hela $\mathbb{C}$. Dåγ är sluten är den automatiskt nollhomotop i $\mathbb{C}$, såfrån Cauchys sats följer det att

$$\int_{\gamma} \frac{1}{n^z} = 0.$$

   Som en konsekvens blir alltså

$$\int_{\gamma} \zeta(z) dz = \sum_{1}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{1}{n^z} = 0. \qquad (1p)$$

   Eftersom ζ är kontinuerlig i området $\{z : Re(z) > a\}$ samt kurvintegralen kring varje styckvist glatt sluten kurva i $\{z : Re(z) > a\}$ blir noll säger Moreras sats att $\zeta(z)$ är holomorf i $\{z :$

$Re(z) > a\}$. Eftersom att vara holomorf är en lokal egenskap och ζ är holo i alla $\{z : Re(z) > a\}$ för $a > 1$ följer att $\zeta(z)$ är holo i $\{z : \mathrm{Re}(z) > 1\}$ (0.5p).

Notera att beviset är helt analogt med beviset för att en konvergent potensserie definierar en holomorf funktion.

Eftersom varje enskild term $\frac{1}{n^z}$ direkt kan ses vara holomorf kommer en naiv derivering innanför summatecknet av serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ automatiskt uppfylla Cauchy-Riemanns ekvationer. Detta leder dock ingen vart sÃě lÃd'nge man inte studerar konvergensen av serien (man hade kunnat studera konvergensen av de partiella derivatorna och använt detta). Därför ges inga poäng på uppgiften om man inte visar konvergens.

Lycka till!
David