Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2018 08 31, 14.00-18.00

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Gustav Kettil, 031-7726792
Kursansvarig: David Witt Nyström, 031-7721068

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. Visa med hjälp av Cauchy-Riemanns ekvationer att funktionen e^{z^2} är holomorf i $\mathbb{C}$. (4p)

2. Låt
$$f(z) := \frac{e^{\sin z} - 1}{z^3}.$$
   a) Svara på om f har en pol i punkten 0 och bestäm i så fall polens ordning. (1p)
   b) Om
   $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$
   betäcknar Laurentserieutvecklingen av f giltig i området $\{z : 0 < |z| < 2\}$, bestäm koefficienterna a_{-3}, a_{-2}, a_{-1} och a_0. (4p)
   c) Bestäm integralen
   $$\int_{|z|=1} f(z)dz.$$
   (1p)
   d) Svara på om f har en pol i punkten $3i$ och bestäm i så fall polens ordning. (1p)
   e) Om
   $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-3i)^n$$
   betäcknar Laurentserieutvecklingen av f giltig i området $\{z : 0 < |z-3i| < 2\}$, bestäm koefficienterna b_{-1} och b_0. (2p)
   f) Bestäm integralen
   $$\int_{|z-3i|=4} f(z)dz.$$
   (1p)

3. Använd residykalkyl för att beräkna integralen
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+12} dx.$$
(7p)

4. Bestäm bilden av området $A := \{z : |z| > 0, 0 < Arg(z) < \pi/3\}$ under avbildningen
$$f(z) := \frac{z^3}{z^3+i}.$$
(Tips: använd att $f(z) = M(z^3)$ där $M(z) = \frac{z}{z+i}$.) (7p)

Obs! Tesen fortsätter på nästa sida.

5. Bestäm antalet nollställen till polynomet $p(z) := z^4 + 4iz + 3 + i$ i området $G := \{z : \text{Im}(z) > 1\}$. (7p)

6. Formulera och bevisa Liouvilles sats. (5p)

7. Formulera och bevisa satsen om Taylorutveckling av holomorfa funktioner. (5p)

8. Visa att om f är en hel funktion (dvs holomorf i hela $\mathbb{C}$) och dessutom

$$|f(z)| \leq |\sin z|$$

för alla $z \in \mathbb{C}$ så finns en konstant $A \in \mathbb{C}$ sådan att $f(z) = A \sin z$. (5p)

Lycka till!
David