Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2018 08 31, 14.00-18.00

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna

Telefonvakt: Gustav Kettil, 031-7726792

Kursansvarig: David Witt Nyström, 031-7721068

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. Visa med hjälp av Cauchy-Riemanns ekvationer att funktionen e^{z^2} är holomorf i $\mathbb{C}$. (4p)

   Lösning:

   Vi observerar att
$$u(x,y) := \mathrm{Re}(e^{z^2}) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$$
   medan
$$v(x,y) := \mathrm{Im}(e^{z^2}) = e^{x^2-y^2}\sin(2xy).$$
   En enkel uträkning ger därför att
$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2-y^2}(2x\cos(2xy) - 2y\sin(2xy)),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2-y^2}(-2y\cos(2xy) - 2x\sin(2xy)),$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{x^2-y^2}(2y\cos(2xy) + 2x\sin(2xy))$$
   samt
$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^{x^2-y^2}(2x\cos(2xy) - 2y\sin(2xy)).$$
   Vi ser då att Cauchy-Riemanns ekvationer är uppfyllda, dvs
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
   samt
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$
   Vi noterar också att alla dessa partiella derivator är kontinuerliga, dvs funktionen e^{z^2} är C^1. Enligt satsen om Cauchy-Riemanns ekvationer är därför e^{z^2} holomorf i $\mathbb{C}$.

2. Låt
$$f(z) := \frac{e^{\sin z} - 1}{z^3}.$$

a) Svara på om f har en pol i punkten 0 och bestäm i så fall polens ordning. (1p)

Lösning: Inspektion ger att f är holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. En standardräkning ger att f:s Laurentserieutveckling börjar såhär:

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{6} + O(z).$$

Detta betyder att 0 är en pol av ordning 2.

b) Om

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

betäcknar Laurentserieutvecklingen av f giltig i området $\{z : 0 < |z| < 2\}$, bestäm koefficienterna a_{-3}, a_{-2}, a_{-1} och a_0. (4p)

Lösning: Från ovan ser vi att $a_{-3} = 0, a_{-2} = 1, a_{-1} = 1/2$ samt $a_0 = -1/6$.

c) Bestäm integralen

$$\int_{|z|=1} f(z)dz.$$

(1p)

Lösning: Eftersom f är holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ och residyn i 0 enligt ovan är $1/2$ följer det från Cauchys formel att

$$\int_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i Res_0(f) = \pi i.$$

d) Svara på om f har en pol i punkten $3i$ och bestäm i så fall polens ordning. (1p)

Lösning: Vi noterar att f är holomorf i en omgivning till punkten $3i$ så det är inte en pol.

e) Om

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-3i)^n$$

betäcknar Laurentserieutvecklingen av f giltig i området $\{z : 0 < |z-3i| < 2\}$, bestäm koefficienterna b_{-1} och b_0. (2p)

Lösning: Eftersom f är holomorf i en omgivning till punkten $3i$ så sammanfaller dess Laurentserie i $\{z : 0 < |z-3i| < 2\}$ med dess Taylorserie i $\{z : |z-3i| < 2\}$. Vi ser därför att $b_{-1} = 0$ samt att $b_0 = f(3i) = -\frac{e^{\sin(3i)}-1}{27i} = i\frac{1-e^{i\,\mathrm{arcsin}(3)}}{27}$.

f) Bestäm integralen

$$\int_{|z-3i|=4} f(z)dz.$$

(1p)

Lösning:

Eftersom f är holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ och kurvan $\gamma(3i, 4)$ i detta område är homotop med $\gamma(0, 1)$ följer från Cauchys sats och ovan att

$$\int_{|z-3i|=4} f(z)dz = \int_{|z|=1} f(z)dz = \pi i.$$

3. Använd residykalkyl för att beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{\cos 3x}{x^2+12}dx.$$

(7p)

Lösning: Låt I beteckna den sökta integralen medan

$$I' := \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos 3x}{x^2+12}dx.$$

Då funktionen är jämn ser vi att $I' = 2I$. Låt

$$f(z) := \frac{e^{3iz}}{z^2+12}.$$

Vi har då att

$$I' = \lim_{R\to\infty}\int_{[-R,R]} \mathrm{Re} f(z)dz = \mathrm{Re}(\lim_{R\to\infty}\int_{[-R,R]} f(z)dz).$$

Låt $\gamma_R(t) := Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$ och $\sigma_R := [-R,R] \cup \gamma_R$. Vi ser att $|e^{3iz}| \le 1$ på övre halvplanet. Omvända triangelolikheten ger att

$$|z^2+12| \ge |z^2| - 12 \ge |z^2|/2$$

för tillräckligt stora $|z|$, vilket betyder att $|f(z)| \le 2/R^2$ för stora R. Tillsammans med triangelolikheten för integraler leder detta till att

$$|\int_{\gamma_R} f(z)dz| \le 2\pi/R$$

och därför

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

Alltså har vi

$$I' = \mathrm{Re}(\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma_R} f(z)dz).$$

Vi noterar också att

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - i2\sqrt{3}}$$

där

$$g(z) := \frac{e^{3iz}}{z + i2\sqrt{3}}$$

är holomorf i övre halvplanet. Dvs f har endast en singularitet i övre halvplanet, i punkten $i2\sqrt{3}$, och enligt sats är

$$Res_{i2\sqrt{3}} f = g(i2\sqrt{3}).$$

En enkel räkning visar att

$$g(i2\sqrt{3}) = -i\frac{e^{-6\sqrt{3}}}{4\sqrt{3}}.$$

Vi får enligt residysatsen att för $R > 2\sqrt{3}$,

$$\int_{\sigma_R} f(z)dz = 2\pi i Res_{i2\sqrt{3}} f = \frac{e^{-6\sqrt{3}}\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Detta betyder att

$$I' = \frac{e^{-6\sqrt{3}}\pi}{2\sqrt{3}}$$

och så tillslut

$$I = I'/2 = \frac{e^{-6\sqrt{3}}\pi}{4\sqrt{3}}.$$

4. Bestäm bilden av området $A := \{z : |z| > 0, 0 < Arg(z) < \pi/3\}$ under avbildningen

$$f(z) := \frac{z^3}{z^3 + i}.$$

(Tips: använd att $f(z) = M(z^3)$ där $M(z) = \frac{z}{z+i}$.) (7p)

Lösning: Låt $g(z) := z^3$, dåser vi att $f = M \circ g$. Vi bestämmer först bilden $B := g(A)$. Vi noterar att $g(re^{i\theta}) = r^3 e^{i3\theta}$, dvs vinkeln tredubblas, vilket betyder att

$$B = g(A) = \{z : |z| > 0, 0 < Arg(z) < \pi\},$$

eller med andra ord är B det övre halvplanet. Eftersom $f(A) = M(g(A)) = M(B)$ återstår nu att bestämma $M(B)$. Vi noterar att M är en Möbiusavbildning och enligt sats avbildar den därför linjer och cirkar på linjer eller cirklar. Det övre halvplanet avgränsas av den reella linjen $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, och det följer att $M(B)$ kommer avgränsas av $M(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$, vilket alltså enligt sats kommer vara en linje eller cirkel. Eftersom $-1, 0, 1$ alla ligger på den reella linjen kommer $M(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ vara den unika linje eller cirkel som innehåller de tre punkterna $M(-1), M(0)$ och $M(1)$. Vi noterar att $M(-1) = (1+i)/2, M(0) = 0$ samt $M(1) = (1-i)/2$. Vi får därför att $M(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ är cirkeln med centrum i $1/2$ med radie $1/2$. Det följer att $f(A)$ antingen är det som ligger innanför eller det som ligger utanför denna cirkel. Punkten i ligger i övre halvplanet och $M(i) = 1/2$, vilket ligger inuti cirkeln, så vi får att $f(A) = \{z : |z - 1/2| < 1/2\}$.

5. Bestäm antalet nollställen till polynomet $p(z) := z^4 + 4iz + 3 + i$ i området $G := \{z : \text{Im}(z) > 1\}$. (7p)

Lösning: b) Vi använder argumentprincipen. Låt $\gamma_R^1(t) := Re^{it} + i$, $t \in [0, \pi]$ och $\gamma_R^2(t) := t + i$, $t \in [-R, R]$, och $\sigma_R := \gamma_R^1 \cup \gamma_R^2$. Vi har att för $R >> 0$

$$arg(p(Re^{it} + i)) \approx (Re^{it})^4 = 4t$$

så

$$argvar_{\gamma_R^1}(p(z)) \approx 4\pi.$$

Vi har att

$$p(t + i) = t^4 - 6t^2 + i(4t^3 + 1).$$

För $R >> 0$ har vi

$$arg(p(-R+i)) \approx 0$$

samt

$$arg(p(R+i)) \approx 0.$$

Vi noterar att realdelen av $p(t+i)$, dvs $t^4 - 6t^2$, ï positiv då $t < -\sqrt{6}$, ickepositiv för $-\sqrt{6} \leq t \leq \sqrt{t}$ samt igen positiv för $t > \sqrt{6}$. Vi ser också att imaginärdelen av $p(-\sqrt{6}+i)$ är negativ medan imaginärdelen av $p(\sqrt{6}+i)$ ï positiv. Man ser nu enklast med figur att detta betyder att

$$argvar_{\gamma_R^2}(p(z)) \approx -2\pi.$$

Den totala argumentvariationen längs σ_R blir därför 2π, vilket enligt argumentprincipen betyder att p har ett nollställe i det inre av σ_R. Låter vi $R \to \infty$ får vi att p har ett nollställe i G.

6. Formulera och bevisa Liouvilles sats. (5p)

   Lösning: Se boken eller föreläsningsanteckningar.

7. Formulera och bevisa satsen om Taylorutveckling av holomorfa funktioner. (5p)

   Lösning: Se boken eller föreläsningsanteckningar.

8. Visa att om f är en hel funktion (dvs holomorf i hela $\mathbb{C}$) och dessutom

$$|f(z)| \leq |\sin z|$$

   för alla $z \in \mathbb{C}$ så finns en konstant $A \in \mathbb{C}$ sådan att $f(z) = A \sin z$. (5p)

   Lösning: Vi noterar att $\sin z$ är en hel funktion, och att den är nollskild förutom i punkterna πk, $k \in \mathbb{Z}$. Det följer då att

$$g(z) := \frac{f(z)}{\sin z}$$

   är en holomorf funktion i $\mathbb{C} \setminus \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$, så g har isolerade singulariteter i punkterna πk. Enligt antagandet har vi att

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|\sin z|} \leq 1.$$

   Enligt sats betyder detta att de isolerade singulariteterna är hävbara, dvs vi kan utvidga g till en holomorf funktion i hela $\mathbb{C}$. g är nu en hel funktion, men vi såg ovan att den dessutom är begränsad, så enligt Liouvilles sats är g konstant, säg $g(z) = A$, $A \in \mathbb{C}$. Men vi har ju att $f(z) = g(z)\sin(z)$ så vi får att $f(z) = A \sin z$, vilket skulle bevisas.

Lycka till!
David