1. Lösningar till MVE025/MVE295, 2016-01-07

1. Låt
$$J_R = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+6z+10}dz,$$
där Γ_R är en halvcirkel i övre halvplanet med bas intervallet $[-R, R]$ och $R >> 0$. Nämnaren har nollställena $z_1 = -3+i$ och $z_2 = -3-i$; av dessa ligger endast z_1 innanför Γ_R. Residysatsen ger därför att
$$J_R = 2\pi i Res(\frac{e^{iz}}{z^2+6z+10}, z_1) = 2\pi i \frac{e^{i(-3+i)}}{2(-3+i)+6} = \pi e^{-1-3i}.$$
Skriv $\gamma_R = [-R, R] \cup C_R$, där C_R är den öppna halvcirkeln. Då gäller
$$|\int_{C_R}| \leq \max_{z\in C_R} \frac{|e^{iz}|}{|z^2+6z+10|} \leq \max \frac{e^{-y}}{R^2-6R-10} \to 0$$
då $R \to \infty$. Det följer att
$$\lim J_R = \lim \int_{[-R,R]} \frac{e^{ix}}{x^2+6x+10}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+6x+10}dx.$$
Alltså får vi att
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+6x+10}dx = \pi e^{-1-3i},$$
vilket ger
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+6x+10}dx = \operatorname{Im} \pi e^{-1-3i} = -\pi e^{-1} \sin 3.$$

2 a. Vi har att $\sin z = zh(z)$ där h är holomorf och $h(0) \neq 0$. Alltså har vi
$$f(z) = (1/z)(1/h(z)).$$
Eftersom $1/h$ är holomorf nära origo har f en pol av ordning 1 där.

b. Eftersom ordningen av polen är 1 och f är udda ansätter vi
$$f(z) = c_{-1}/z + c_1 z + c_3 z^3 + \ldots.$$
Detta ger (med användning av Taylorutvecklinegn för sinusfunktionen) att
$$z = (z - z^3/3! + z^5/5! + O(z^7))^2 (c_{-1}/z + c_1 z + c_3 z^3 + \ldots.)$$

Nu är

$$(z - z^3/3! + z^5/5! + O(z^7))^2 = z^2 - 2z^4/3! + 2z^6/5! + z^6/(3!)^2 + O(z^8),$$

så identifiering av koefficienterna ger

$$c_1 = 1, 0 = c_1 - (1/3)c_{-1}, 0 = c_3 - (1/3)c_1 + ac_{-1},$$

där a är koefficienten för z^6 i $\sin^2 z$, d v s $a = 2/5! + (1/3!)^2 = 2/45$. Summa summarum

$$c_{-1} = 1, c_1 = 1/3, c_3 = 1/9 - a = 1/15.$$

c. Residyn till f är $c_{-1} = 1$.

3.Sätt $f(z) = z^4 - 5z^2 + 3 - e^{-z}$. På imaginäraxeln är $z = it$ (t reellt) och $f(it) = t^4 + 5t^2 + 3 - e^{-it}$. Eftersom $|\mathrm{Re}\, e^{-it}| = |\cos t| \leq 1$ är $\mathrm{Re}\, f(it) \geq 2$, så $f(it) \neq 0$.

Vi använder nu argumentprincipen och bör jar med att beräkna argvar av $f(it)$ när t går från ∞ till $-\infty$. Om $t >> 0$ är argumentet till $f(it)$ nästan 0, och samma sak gäller då $t << 0$. Eftersom realdelen av $f(it) > 0$ för all t måste argumentvariationen på imaginäraxeln vara nästan 0. Å andra sidan är argumentvariationen längs en stor halvcirkel i högra halvplanet nästan densamma som argumentvariationen av $z^4 - 5z^2 + 3$, dvs 4π, eftersom $|e^{-z}| \leq 1$ i högra halvplanet. Den totala argumentvariationen av f längs en sluten halvcirkel blir alltså nästan (och därför exakt) 4π, och antalet nollställen blir 2.

4. Laplace transformering ger att

$$L(u') = s\tilde{u} + 1, L(u'') = s^2\tilde{u} + s - 2$$

om u uppfyller begynnelsevillkoren. Laplacetransformering av ekvationen ger då att

$$(s^2 + s - 2)\tilde{u} = \tilde{f} + (1 - s).$$

Nu är $s^2 + s - 2 = (s - 1)(s + 2)$ så

$$\tilde{u} = -1/(s + 2) + \tilde{f}/(s - 1)(s + 2).$$

Partialbråksuppdelning ger

$$1/(s - 1)(s + 2) = (1/3)(1/(s - 1) - 1/(s + 2)).$$

Inverstranformering ger sedan att

$$u(t) = -e^{-2t} + f * (e^t - e^{-2t})/3.$$

5.

Låt först $f(z) = z^2$. Denna funktion avbildar området på $D = \{w, \mathrm{Im}\, w > 0, |w| > 1\}$. Vi avbildar sedan D med funktionen

$$g(w) = \frac{w - 1}{w + 1}.$$

Funktionen g avbildar reella axeln på sig själv och enhetscirkeln på en linje genom origo (eftersom $g(-1) = \infty$ och $g(1) = 0$). Dessutom är denna linje ortogonal mot Re-axeln, eftersom Möbiusavbildningar bevarar vinklar. Bilden av enhetscirklen under g är alltså imaginäraxeln.

Bilden av D måste därför begränsas av Re-axeln och Im-axeln, så bilden är en av de fyra kvadranterna. Explicit räkning visar att $g(2i) = (3+4i)/5$, så bilden av D måste vara första kvadranten. En sista kvadrering $\zeta \to h(\zeta) = \zeta^2$ överför nu första kvadranten i övre halvplanet. Den slutliga avbildningen blir därför $z \to z^2 \to g(z^2) \to g(z^2)^2$, dvs

$$z \to \left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^2.$$

8. Vi har om $p(z) = a_0 + a_1 z + ... a_N z^N$ att

$$q(z) = z^N \overline{p(1/\bar{z})} = \bar{a}_0 z^N + \bar{a}_1 z^{N-1} + ... \bar{a}_N,$$

ett polynom. Om $|z| = 1$ så gäller $1/\bar{z} = z$ så

$$p(z)q(z) = z^N p(z)\overline{p(z)} = z^N$$

eftersom $|p(z)| = 1$. Eftersom båda sidorna är holomorfa funktioner måste samma identitet gälla överallt. Eftersom graden av pq är graden av p plus graden av q och graden av p är N, måste graden av q vara noll, dvs q är en konstant. Formeln ovan för q ger då att $q = \bar{a}_N$ och alla andra $a_0 = ... a_{N-1} = 0$. Alltså är $p(z) = a_N z^N$!