Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2017 12 21, 8.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Felix Held, 031-7725325
Kursansvarig: David Witt Nyström, 031-7721068

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. Lös med hjälp av Laplacetransform begynnelsevärdesproblemet
$$u''(t) + 2u'(t) - 3u(t) = e^t + e^{-3t}, \qquad t \geq 0,$$
med begynnelsevillkor $u(0) = 0$ och $u'(0) = 2$. (7p)

2. a) Använd residykalkyl för att beräkna Fouriertransformen av funktionen
$$\frac{1}{x^2 - 2x + 9}.$$
(5p)

   b) Använd resultatet i a) för att bestämma
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x^2 - 2x + 9} dx.$$
(2p)

3. Bestäm antal nollställen till polynomet $p(z) := z^4 - 2z^3 - 2iz + 3i$ i områdena:

   a) det nedre halvplanet $\{z : \text{Im}(z) < 0\}$, (4p)

   b) kvadraten $\{z : -10 < \text{Re}(z) < 10, -10 < \text{Im}(z) < 10\}$. (3p)

4. Hitta en bijektiv konform avbildning från området $A := \{z : \text{Re}(z) > 0, \text{Im}(z) > 0\}$ till området $B := \{z : 0 < |z| < 1, -3\pi/4 < \text{Arg}(z) < 3\pi/4\}$. Var tydlig med hur avbildningen är definierad.

5. Antag att Laurentserien $f(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z+1)^k$ konvergerar i området $\{z : 1 < |z+1| < 10\}$. Bestäm integralerna:

   a)
$$\int_{|z|=3} f e^z dz,$$
(3p)

   b)
$$\int_{|z|=3} \frac{f}{z^2} dz.$$
(4p)

6. Formulera och bevisa Algebrans fundamentalsats. (5p)

7. Formulera och bevisa satsen om Laurentserieutveckling av holomorfa funktioner. (5p)

8. Bestäm alla hela funktioner f sådana att $|f(z)| = 1$ då $|z| = 1$ samt $f(z) \neq 0$ då $0 < |z| < 1$. Kom ihåg att en funktion sägs vara hel om den är holomorf i hela $\mathbb{C}$. (5p)

Lycka till!
David