Lösningar till tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2017 12 21, 8.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Felix Held, 031-7725325
Kursansvarig: David Witt Nyström, 031-7721068

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. Lös med hjälp av Laplacetransform begynnelsevärdesproblemet

$$u''(t) + 2u'(t) - 3u(t) = e^t + e^{-3t}, \qquad t \geq 0,$$

med begynnelsevillkor $u(0) = 0$ och $u'(0) = 2$. (7p)

Lösning:

Vi tar Laplacetransformen av ekvationen och får

$$s^2\tilde{u} - 2 + 2s\tilde{u} - 3\tilde{u} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+3}$$

vilket ger oss att

$$\tilde{u} = \frac{1}{s^2+2s-3}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} + 2\right).$$

Efter faktorisering

$$s^2 + 2s - 3 = (s-1)(s+3)$$

och partialbråksuppdeling

$$\frac{1}{(s-1)(s+3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+3}\right)$$

leder detta till

$$\tilde{u} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s+3)^2} + \frac{2}{s-1} - \frac{2}{s+3}\right).$$

Från tabell har vi

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{1}{(s-a)^{n+1}}$$

så vi får att

$$\tilde{u} = \frac{1}{4}\mathcal{L}(te^t - te^{-3t} + 2e^t - 2e^{-3t}).$$

Enligt inversionsformlen får vi därför att

$$u = \frac{1}{4}\left(te^t - te^{-3t} + 2e^t - 2e^{-3t}\right).$$

2. a) Använd residykalkyl för att beräkna Fouriertransformen av funktionen

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 9}.$$

(5p)

b) Använd resultatet i a) för att bestämma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x^2 - 2x + 9} dx.$$

(2p)

Lösning: a) Låt

$$f(x) := \frac{1}{x^2 - 2x + 9},$$

då har vi enligt definition att

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{x^2 - 2x + 9} dx, \qquad (0.5p).$$

Vi sätter

$$g(z) := \frac{e^{-itz}}{z^2 - 2z + 9}.$$

Vi vet då att

$$\hat{f}(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} g(z)dz, \qquad (0.5p).$$

Vi antar först att $t \leq 0$. Låt $\gamma_R(s) := Re^{is}$, $s \in [0, \pi]$ samt $\sigma_R := [-R, R] \cup \gamma_R$ som då är en sluten kurva. Vi har att

$$\left| \int_{\gamma_R} g dz \right| \leq \max_{z\in\gamma_R} \left| \frac{e^{-itz}}{z^2 - 2z + 9} \right| |\gamma_R| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 2R - 9} \longrightarrow 0$$

då $R \to \infty$. Här använde vi först triangelolikheten för integraler, sedan att $|e^{-itz}| = e^{ty} \leq 1$ på γ_R samt att $|z^2 - 2z + 9| \geq |z|^2 - 2|z| - 9 = R^2 - 2R - 9$ på γ_R tack vare den omvända triangelolikheten (1.5p). Detta implicerar att

$$\hat{f}(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} g dz.$$

Vi noterar nu att $z^2 - 2z + 9 = (z - 1 + i2\sqrt{2})(z - 1 - i2\sqrt{2})$ så $g(z)$ är holomorf i $\mathbb{C}$ förutom isolerade singulariteter i $1 \pm i2\sqrt{2}$, där bara $1 + i2\sqrt{2}$ ligger i det inre av σ_R för stora R. Eftersom $1+i2\sqrt{2}$ är ett enkelt nollställe till z^2-2z+9 har vi enligt räkneregler för residyer att

$$Res_{1+i2\sqrt{2}} g = \left(\frac{e^{-itz}}{2z - 2} \right)_{|z=1+i2\sqrt{2}} = \frac{e^{2\sqrt{2}t} e^{-it}}{4\sqrt{2}i}, \qquad (1p).$$

Residysatsen säger nu att

$$\int_{\sigma_R} g dz = 2\pi i Res_{1+i2\sqrt{2}} g = \frac{\pi e^{2\sqrt{2}t} e^{-it}}{2\sqrt{2}},$$

så sammantaget får vi att för $t \leq 0$ är

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{2\sqrt{2}t} e^{-it}}{2\sqrt{2}}, \qquad (0.5p).$$

Eftersom f är reellvärd gäller räkneregeln

$$\hat{f}(t) = \overline{\hat{f}(-t)}$$

så vi får att för $t \geq 0$ är

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{-2\sqrt{2}t} e^{-it}}{2\sqrt{2}}.$$

Sammantaget får vi därför att

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{-2\sqrt{2}|t|} e^{-it}}{2\sqrt{2}}, \qquad (1p).$$

b) Vi noterar att

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \mathrm{Im}(e^{2ix}).$$

Eftersom f är reellvärd följer det att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x^2 - 2x + 9} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 - 2x + 9} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix} 2x}{x^2 - 2x + 9} dx \right) = \frac{1}{2} \mathrm{Im}(\hat{f}(-2)) = \frac{\pi e^{4\sqrt{2}} \sin 2}{4\sqrt{2}}.$$

3. Bestäm antal nollställen till polynomet $p(z) := z^4 - 2z^3 - 2iz + 3i$ i områdena:

a) det nedre halvplanet $\{z : \mathrm{Im}(z) < 0\}$, (4p)

b) kvadraten $\{z : -10 < \mathrm{Re}(z) < 10, -10 < \mathrm{Im}(z) < 10\}$. (3p)

Lösning: a) Vi använder argumentprincipen. Låt $\gamma_R(t) := Re^{it}, t \in [-\pi, 0]$ och $\sigma_R := [R, -R] \cup \gamma_R$. Vi ser att

$$p(Re^{it}) = R^4 \left(e^{4it} - \frac{2e^{3it}}{R} - \frac{2ie^{it}}{R^3} + \frac{3i}{R^4} \right)$$

så $arg(p(Re^{it})) \approx 4t + 2\pi k$ för stora R vilket implicerar att $argvar(f(\gamma_R)) \approx 4\pi$ för stora R. Vi har också att

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + i(-2x + 3).$$

Speciellt får vi att $arg(p(R)) \approx 0 + 2\pi k_1$ och vi ser också att $p(R)$ ligger i nedre halvplanet för stora R. Vidare ser vi att $arg(p(-R)) \approx 0 + 2\pi k_2$ och vi ser också att $p(-R)$ ligger i övre halvplanet för stora R. Då $\mathrm{Im}(p(x)) = 0$ omm $x = 3/2$ ser vi att kurvan $p([R, -R])$ endast passerar x-axeln i punkten $-27/16$. Detta betyder dels att $p \neq 0$ på den reella axeln, dels att kurvan $p([R,-R])$ måste gå i princip ett helt varv runt 0 i negativ riktning (ses bäst i figur), dvs $argvar(p([R,-R])) \approx -2\pi$. Vi får att

$$W(p(\sigma_R)) = \frac{1}{2\pi} argvar(p(\sigma_R)) = \frac{1}{2\pi}(argvar(p(\gamma_R) + argvar(p([R,-R]))) \approx 1$$

för stora R. Men vindningstal är heltal så vi får att för stora R är

$$W(p(\sigma_R)) = 1.$$

Argumentprincipen säger då att p har ett nollstÃd'lle i $int(\sigma_R)$ för stora R, dvs p har ett nollställe i det öppna nedre halvplanet.

b) Vi använder Rouchés sats. Skriv $p = f + g$ där $f(z) := z^4$ och $g(z) := -2z^3 - 2iz + 3i$. På randen till kvadraten K gäller

$$10 \leq |z| \leq 10\sqrt{2}.$$

Vi har då att $|f| \geq 10^4$ på ∂K medan mha triangelolikheten $|g| \leq |-2z^3| + |-2iz| + |3i| \leq 4000\sqrt{2} + 20\sqrt{2} + 3 < 10^4$ på ∂K. Alltså har vi $|f| > |g|$ på ∂K så enligt Rouchés sats har därför p lika många nollställen som f i K, dvs 4 st.

4. Hitta en bijektiv konform avbildning från området $A := \{z : \text{Re}(z) > 0, \text{Im}(z) > 0\}$ till området $B := \{z : 0 < |z| < 1, -3\pi/4 < \text{Arg}(z) < 3\pi/4\}$. Var tydlig med hur avbildningen är definierad.

   Lösning: Det finns många sätt att lösa denna uppgift på, här följer en lösning. Vi letar först efter en Möbiusavbildning $M(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ som avbildar A på $C := \{z : 0 < |z| < 1, -\pi/2 < \text{Arg}(z) < \pi/2\}$. Notera att A avgränsas av den reella och den imagiära axeln, som skär varandra i 0 och ∞. Vi väljer nu M s.a. $M(0) = -i$, $M(\infty) = i$ och $M(i) = 0$. Vi får att $ai + b = 0$, så vi kan sätta $a = 1$ samt $b = -i$. Vi får också$a/c = i$, dvs $c = -i$. Slutligen har vi $b/d = -i$ dvs $d = 1$, så sammantaget får vi att $M(z) = \frac{z-i}{-iz+1}$. Enligt sats avbildar Möbiusavbildningar cirklar och linjer på cirklar eller linjer. De tre punkterna $0, \infty, i$ ligger pålinjen $i\mathbb{R}$ och avbildas därför på en cirkel eller linje som innehåller punkterna $-i, i\infty$, dvs $i\mathbb{R}$. Vi ser också att den reella axeln avbildas på en cirkel eller linje som innehåller punkterna $-i, i$. Dessutom vet vi enligt sats att Möbiusavbildningar är konforma, dvs bevarar vinkeln mellan kurvor. Den reella och imaginära axeln skär varandra i rät vinkel i punkten 0, så$M(\mathbb{R})$ måste skära $M(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}$ i rät vinkel i punkten $-i$. Detta leder till att $M(\mathbb{R})$ måste vara enhetscirkeln. Det följer att $M(A)$ avgränsas av den imaginära axeln samt enhetscirkeln. Vi tar nu en punkt i A, säg $1 + i$, och ser i vilket av de fyra möjliga sådana områden det hamnar. Vi har $M(1 + i) = (2 + i)/5$ vilket vi ser ligger i enhetscirkeln och i högra halvplanet, så vi får att $M(A) = C$. Vi vet att $\text{Log}(z) = \ln|z| + \text{Arg}(z)$ är holomorf i $\{z : 0 < |z| < 1, -\pi < \text{Arg}(z) < \pi\}$ så speciellt i C. Det följer att

$$z^{3/2} := e^{\frac{3}{2}\text{Log}(z)}$$

är holomorf i C. Vi noterar också att

$$|z^{3/2}| = |z|^{3/2}$$

samt

$$\text{Arg}(z^{3/2}) = \frac{3}{2}\text{Arg}(z).$$

Från detta följer att $z^{3/2}$ avbildar C bijektivt påB. Vi har ocksåatt

$$(z^{3/2})' = \frac{3}{2} z^{1/2} \neq 0$$

i C, så enligt sats är $z^{3/2}$ konform. Vi har alltså att M är en konform bijektiv avbildning från A till C samt att $z^{3/2}$ är en bijektiv konform avbildning från C till B, så sammansättningen

$$z^{3/2} \circ M(z) = \left(\frac{z-i}{-iz+1} \right)^{3/2}$$

är en konform bijektiv avbildning från A till B.

5. Antag att Laurentserien $f(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z+1)^k$ konvergerar i området $\{z : 1 < |z+1| < 10\}$.

   Bestäm integralerna:

   a)
   $$\int_{|z|=3} f e^z dz,$$
   (3p)

   b)
   $$\int_{|z|=3} \frac{f}{z^2} dz.$$
   (4p)

Lösning: a) Vi har att

$$e^z = e^{-1} e^{z+1} = e^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z+1)^m}{m!},$$

såfe^z har Laurentserieutvecklingen

$$fe^z = (\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z+1)^k)(e^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z+1)^m}{m!}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l (z+1)^l,$$

där

$$b_l = e^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{l-m}}{m!}.$$

Eftersom fe^z är holomorf i $\{z : 1 < |z+1| < 10\}$ och $C(0,3)$ är homotop med $C(-1,3)$ i $\{z : 1 < |z+1| < 10\}$ så följer det från Cauchys sats att

$$\int_{|z|=3} fe^z dz = \int_{|z+1|=3} fe^z dz.$$

Vi vet ocksåfrån satsen om Laurentserieutvecklingar av holomorfa funktioner att

$$\int_{|z+1|=3} fe^z dz = 2\pi i b_{-1},$$

så sammantaget får vi att

$$\int_{|z|=3} fe^z dz = 2\pi i b_{-1} = e^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{-m-1}}{m!}.$$

b) Skriv $w = z + 1$ dvs $z = w - 1$. Vi får att i $\{z : |z + 1| > 1\}$ så har vi

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{w-1} = \frac{1}{w}\frac{1}{1-1/w} = \frac{1}{w} \sum_{m=-\infty}^{0} w^m = \sum_{m=-\infty}^{-1} w^m$$

och

$$\frac{1}{z^2} = -\left(\frac{1}{z}\right)' = -\left(\sum_{m=-\infty}^{-1} w^m\right)' = -\sum_{m=-\infty}^{-2} (m+1)w^m = -\sum_{m=-\infty}^{-2} (m+1)(z+1)^m.$$

Detta ger oss att f/z^2 i $\{z : 1 < |z + 1| < 10\}$ har Laurentserieutveckligen

$$\frac{f}{z^2} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z+1)^k\right)\left(-\sum_{m=-\infty}^{-2}(m+1)(z+1)^m\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l(z+1)^l,$$

där

$$c_l = -\sum_{m=-\infty}^{-2}(m+1)a_{l-m}.$$

Eftersom f/z^2 är holomorf i $\{z : 1 < |z + 1| < 7\}$ och $C(0, 3)$ är homotop med $C(-1, 3)$ i $\{z : 1 < |z + 1| < 7\}$ så följer det från Cauchys sats att

$$\int_{|z|=3} \frac{f}{z^2} dz = \int_{|z+1|=3} \frac{f}{z^2} dz.$$

Vi vet ocksåfrån satsen om Laurentserieutvecklingar av holomorfa funktioner att

$$\int_{|z+1|=3} \frac{f}{z^2} dz = 2\pi i c_{-1},$$

så sammantaget får vi att

$$\int_{|z|=3} \frac{f}{z^2} dz = 2\pi i c_{-1} = -\sum_{m=-\infty}^{-2}(m+1)a_{-m-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k.$$

6. Formulera och bevisa Algebrans fundamentalsats. (5p)

   Lösning: Se bok eller föreläsningsanteckningar.

7. Formulera och bevisa satsen om Laurentserieutveckling av holomorfa funktioner. (5p)

   Lösning: Se bok eller föreläsningsanteckningar.

8. Bestäm alla hela funktioner f sådana att $|f(z)| = 1$ då $|z| = 1$ samt $f(z) \neq 0$ då $0 < |z| < 1$. Kom ihåg att en funktion sägs vara hel om den är holomorf i hela $\mathbb{C}$. (5p)

Lösning: Vi påstår att f är hel och $|f(z)| = 1$ då $|z| = 1$ samt $f(z) \neq 0$ då $0 < |z| < 1$ om och endast om

$$f(z) = az^N$$

där $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$ och N är ett icke-negativt heltal.

Först noterar vi att om

$$f(z) = az^N$$

där $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$ och N är ett icke-negativt heltal, så är f hel, $f(z) \neq 0$ då $0 < |z| < 1$, samt då $|z| = 1$ får vi

$$|f(z)| = |az^N| = |a||z|^N = 1.$$

Detta visar den första implikationen.

Det återstår att visa att om f är hel, $|f(z)| = 1$ då $|z| = 1$ samt $f(z) \neq 0$ då $0 < |z| < 1$, dåmåste

$$f(z) = az^N$$

där $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$ och N är ett icke-negativt heltal.

Vi antar först att $f(0) \neq 0$. Det följer att $f \neq 0$ i $\overline{D(0,1)}$. Vi vet från exempel i kursen att $\ln|f|$ är harmonisk så länge $f \neq 0$, dvs speciellt i $D(0,1)$. Holomorfa funktioner är kontinuerliga, så vi har ocksåatt $\ln|f|$ är kontinuerlig på $\overline{D(0,1)}$. Svaga maximumprincipen säger nu att

$$\max_{z \in \overline{D(0,1)}} \ln|f(z)| = \max_{z \in \partial\overline{D(0,1)}} \ln|f(z)|$$

samt

$$\max_{z \in \overline{D(0,1)}} \ln|f(z)| = \max_{z \in \partial\overline{D(0,1)}} \ln|f(z)|,$$

men då $\partial\overline{D(0,1)} = C(0,1)$ och enligt antagandet $\ln|f| = 0$ på $C(0,1)$ följer det att $\ln|f|$ är identiskt lika med noll på $D(0,1)$, dvs $|f|$ är konstant på $D(0,1)$. Det följer dåfrån Cauchy-Riemanns ekvationer att f är konstant i $D(0,1)$, säg $f(z) = a$. Låt $z_n := 1/n$, dåär detta en följd av distinkta punkter i $\mathbb{C}$ som konvergerar mot punkten 0 i $\mathbb{C}$. $f(z)$ och den konstanta funktionen a antar samma värden i alla dessa punkter, så enligt identitetsprincipen är de identiska i $\mathbb{C}$, dvs $f(z) = a$ i hela $\mathbb{C}$. Vi noterar också att $|a| = 1$ då $|f| = 1$ på $C(0,1)$.

Vi har alltså visat att om f är hel, $|f(z)| = 1$ då $|z| = 1$ samt $f(z) \neq 0$ då $|z| < 1$ så är $f(z) = a$ där $|a| = 1$. Anta nu att $f(0) = 0$. Enligt klassifikation av nollställen finns ett positivt heltal N samt en hel funktion g med $g(0) \neq 0$ samt

$$f(z) = z^N g(z).$$

Från detta ser vi att

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|^N}$$

så det följer från antagandena att $|g(z)| = 1$ då $|z| = 1$ samt $f(z) \neq 0$ då $|z| < 1$. Eftersom dessutom $g(0) \neq 0$ följer det från ovan att $g(z) = a$ för något $|a| = 1$, och därför att

$$f(z) = z^N g(z) = az^N$$

med $|a| = 1$. VSB.

Lycka till!
David