Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2019 08 30, 14.00-18.00

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Juan Inda, 031-7725325
Kursansvarig: David Witt Nyström, 031-7721068

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. Visa med hjälp av Cauchy-Riemanns ekvationer att funktionen
$$f(x,y) := \frac{x-iy-1}{(x-1)^2+y^2}$$
är holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. (3p)

2. Antag att funktionen $u(x,y) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ är harmonisk och att $\frac{\partial u}{\partial y}$ ej är identiskt lika med 0. Visa att funktionen $v(x,y) := yu(x,y)$ inte är harmonisk. (4p)

3. Beräkna med hjälp av residykalkyl Fouriertransformen av
$$g(t) := \frac{t}{(t^2+1)(t^2+4)}.$$
(7p)

4. Hitta en bijektiv och konform avbildning som avbildar området
$$A := \{z : 0 < |z| < 1, 0 < \text{Arg}(z) < \pi/2\}$$
på området
$$B := \{z : z \neq 0, -3\pi/4 < \text{Arg}(z) < 3\pi/4\}.$$
(7p)

5. Bestäm antalet nollställen till polynomet $p(z) := z^5 + z^3 + 30 - 30i$ i annulusen $\{z : 1 < |z-1| < 4\}$. (7p)

6. Antag att Laurentserien $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-1)^k$ konvergerar i annulusen $\{z : 1 < |z-1| < 10\}$. Bestäm integralerna

   (a)
$$\int_{|z|=4} f(z) z^2 dz,$$
(3p)

   (b)
$$\int_{|z|=4} f(z) \sin(z) dz.$$
(4p)

7. Formulera och bevisa Cauchys sats. (5p)

8. Formulera och bevisa Algebrans fundamentalsats. (5p)

9. Visa att om f är en hel funktion och dessutom $|f| \leq \ln(1+x^2+y^2)$, så är $f = 0$. (5p)

Lycka till!
David