Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2019 08 30, 14.00-18.00

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Juan Inda, 031-7725325
Kursansvarig: David Witt Nyström, 031-7721068

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. Visa med hjälp av Cauchy-Riemanns ekvationer att funktionen

$$f(x,y) := \frac{x - iy - 1}{(x-1)^2 + y^2}$$

är holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. (3p)

Lösning: Enkel räkning ger att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2 + 2ixy + 2x - 2iy - 1}{((x-1)^2 + y^2)^2}$$

samt

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-ix^2 + iy^2 - 2xy + 2ix - 2y - i}{((x-1)^2 + y^2)^2} = i\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Vi noterar också att de partiella derivatorna är kontinuerliga. Satsen om Cauchy-Riemanns ekvationers sÃď ger då att f är holomorf.

2. Antag att funktionen $u(x,y) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ är harmonisk och att $\frac{\partial u}{\partial y}$ ej är identiskt lika med 0. Visa att funktionen $v(x,y) := yu(x,y)$ inte är harmonisk. (4p)

Lösning: Enkel räkning ger att

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

samt

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

vilket ger att

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 2\frac{\partial u}{\partial y},$$

där vi i sista steget använde att u var harmonisk. Enligt antagandet är $\frac{\partial u}{\partial y}$ ej identiskt med noll, så$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ är ej heller identiskt lika med noll, vilket innebär att v ej är harmonisk.

3. Beräkna med hjälp av residykalkyl Fouriertransformen av

$$g(t) := \frac{t}{(t^2+1)(t^2+4)}.$$

(7p)

Lösning:

Enligt definition har vi att

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^{-ixt}}{(t^2+1)(t^2+4)} dx.$$

Vi sätter

$$f(z) := \frac{ze^{-ixz}}{(z^2+1)(z^2+4)}.$$

Vi vet då att

$$\hat{g}(x) = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} f(z)dz.$$

Vi antar först att $x \leq 0$. Låt $\gamma_R(s) := Re^{is}$, $s \in [0, \pi]$ samt $\sigma_R := [-R, R] \cup \gamma_R$ som då är en sluten kurva. Vi har att

$$\left| \int_{\gamma_R} f dz \right| \leq \max_{z\in\gamma_R} \left| \frac{ze^{-ixz}}{(z^2+1)(z^2+4)} \right| |\gamma_R| \leq \frac{\pi R^2}{(R^2-1)(R^2-4)} \longrightarrow 0$$

då $R \to \infty$. Här använde vi först triangelolikheten för integraler, sedan att $|e^{-ixz}| = e^{xy} \leq 1$ på γ_R samt att $|(z^2+1)(z^2+4)| \geq (|z|^2-1)(|z|^2-4) = (R^2-1)(R^2-4)$ på γ_R tack vare den omvända triangelolikheten. Detta implicerar att

$$\hat{g}(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} f dz.$$

Vi noterar nu att $f(z)$ är holomorf i $\mathbb{C}$ förutom isolerade singulariteter i $\pm i$ och $\pm 2i$, varav i och $2i$ ligger i det inre av σ_R för stora R. Enligt räkneregler för residyer har vi att

$$Res_i f = \left(z\frac{e^{-ixz}}{(z+i)(z^2+4)} \right)_{|z=i} = \frac{e^x}{6},$$

samt

$$Res_{2i} g = \left(\frac{ze^{-ixz}}{(z^2+1)(z+2i)} \right)_{|z=2i} = -\frac{e^{2x}}{6}.$$

Residysatsen säger nu att

$$\int_{\sigma_R} f dz = 2\pi i(Res_i f + Res_{2i} f) = 3\pi i(e^x - e^{2x}),$$

så sammantaget får vi att för $t \leq 0$ är

$$\hat{g}(x) = 3\pi i(e^x - e^{2x}).$$

Eftersom g är reellvärd gäller räkneregeln

$$\hat{g}(x) = \overline{\hat{g}(-x)}$$

så vi får att för $x \geq 0$ är

$$\hat{g}(x) = -3\pi i(e^{-x} - e^{-2x}).$$

Sammantaget får vi därför att

$$\hat{g}(x) = sgn(x)3\pi i(e^{-2|x|} - e^{-|x|}).$$

4. Hitta en bijektiv och konform avbildning som avbildar området

$$A := \{z : 0 < |z| < 1, 0 < \text{Arg}(z) < \pi/2\}$$

på området

$$B := \{z : z \neq 0, -3\pi/4 < \text{Arg}(z) < 3\pi/4\}.$$

(7p)

Lösning: Det finns många korrekta svar och lösningar. Här ges ett alternativ. Låt $f := z^2$. f avbildar A bijektivt på halvcirkeln

$$C := \{z : 0 < |z| < 1, 0 < \text{Arg}(z) < \pi\}.$$

Eftersom $f' = 2z$ är nollskild på A är denna avbildning dessutom konform (enligt sats). Vi låter nu M vara Möbiusavbildningen s.a. $M(-1) = 0, M(0) = 1, M(1) = \infty$. Standardräkning ger att

$$M(z) = \frac{-z-1}{z-1}.$$

Enligt sats avbildar Möbiusavbildningar cirklar och linjer påcirklar eller linjer. Vi får att M måste avbilda reella axeln på sig själv. Då enhetscirkeln skär reella axeln i rät vinkel i punkten -1 och Möbiusavbildningar är konforma måste bilden av enhetscirkel skära reella axeln i rät vinkel i origo. Det måste också vara en linje då den innehåller ∞. Alltså avbildas enhetscirkeln på den imaginära axeln. Pga konformitet bevaras orienteringen vilket ger att M avbildar C bijektivt och konformt på första kvadranten (ses bäst med bild). Låt $g(z) := (1-i)z$. g avbildar första kvadranten bijektivt och konformt på$D := \{z : z \neq 0, -\pi/4 < \text{Arg}(z) < \pi/4\}$. Låt $h := z^3$. På liknande sätt som ovan ser vi att h avbildar D bijektivt och konformt på B. Eftersom sammansättningen av bijektiva och konforma avbildningar är bijektiv och konform får vi att

$$h \circ g \circ M \circ f(z) = \frac{((i-1)z + 1 - i)^3}{(z^2-1)^3}$$

är en bijektiv och konform avbildning från A till B.

5. Bestäm antalet nollställen till polynomet $p(z) := z^5 + z^3 + 30 - 30i$ i annulusen
$\{z : 1 < |z-1| < 4\}$. (7p)

Lösning: Vi använder Rouchés sats. Vi undersöker först cirkelskivan $D(1,4)$. Låt $f := z^5$ och $g := z^3 + 30 - 30i$. Notera att vi påranden $C(1,4)$ har $3 \leq |z| \leq 5$. Vi får att på $C(1,4)$ har vi

$$|f(z)| = |z|^5 \geq 3^5 = 243,$$

medan

$$|g(z)| = |z^3 + 30 - 30i| \leq |z|^3 + |30| + |-30i| \leq 5^3 + 30 + 30 = 185.$$

I och med att $|f| > |g|$ på $C(1,4)$ följer det enligt RouchÃl's sats att $p = f + g$ har lika många nollställen som f i $D(1,4)$, dvs 5 stycken. Vi undersöker nu $D(1,1)$. Låt $f := 30 - 30i$ och $g := z^5 + z^3$. Notera att

$$|f(z)| = |30 - 30i| = 30\sqrt{2}.$$

Påranden $C(1,1)$ har $|z| \leq 2$, vilket ger att

$$|g(z)| = |z^5 + z^3| \leq |z|^5 + |z|^3 \leq 2^5 + 2^3 = 40 < 30\sqrt{2}.$$

Enligt RouchÃl's sats har vi då $p = f + g$ har lika många nollställen i $D(1,1)$ som f, dvs noll stycken. Dessutom innebär olikheten $|f| > |g|$ på $C(1,1)$ att p ej har nollställen där, så p har $5 - 0 = 5$ nollställen.

6. Antag att Laurentserien $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-1)^k$ konvergerar i annulusen $\{z : 1 < |z-1| < 10\}$. Bestäm integralerna

(a)
$$\int_{|z|=4} f(z) z^2 dz,$$
(3p)

(b)
$$\int_{|z|=4} f(z) \sin(z) dz.$$
(4p)

Lösning: a) Eftersom $C(0,4)$ ligger i annulusen $\{z : 1 < |z-1| < 10\}$ så konvergerar enligt sats serien likformigt där. Det betyder att man får lov att föra ut summationstecknet ur integralen, dvs att

$$\int_{|z|=4} f(z)z^2 dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{|z|=4} (z-1)^k z^2 dz.$$

När $k \geq 0$ är integranden holomorf, och integralen blir då 0 enligt Cauchys sats. För $k < 0$ får vi enligt Residysatsen att

$$b_k := \int_{|z|=4} (z-1)^k z^2 dz = 2\pi i (z^2)^{(-k-1)}_{|z=1},$$

dvs $b_{-1} = 2\pi i, b_{-2} = 4\pi i, b_{-3} = 4\pi i$ samt $b_k = 0$ för $k < -3$. Sammantaget får vi att

$$\int_{|z|=4} f(z)z^2 dz = 4\pi i a_{-3} + 4\pi i a_{-2} + 2\pi i a_{-1}.$$

b) På samma sätt som i a) har vi att

$$\int_{|z|=4} f(z)\sin(z) dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{|z|=4} (z-1)^k \sin(z) dz.$$

När $k \geq 0$ är integranden holomorf, och integralen blir då 0 enligt Cauchys sats. För $k < 0$ får vi enligt Residysatsen att

$$c_k := \int_{|z|=4} (z-1)^k \sin(z) dz = 2\pi i (\sin(z))^{(-k-1)}_{|z=1},$$

dvs $c_{2k} = 2\pi i \cos(1)$ samt $c_{2k+1} = 2\pi i \sin(1)$. Sammantaget får vi att

$$\int_{|z|=4} f(z)\sin(z) dz = 2\pi i(\cos(1) \sum_{k=-\infty}^{-1} a_{2k} + \sin(1) \sum_{k=-\infty}^{-1} a_{2k+1}).$$

7. Formulera och bevisa Cauchys sats. (5p)

   Lösning: Se bok eller föreläsningsanteckningar.

8. Formulera och bevisa Algebrans fundamentalsats. (5p)

   Lösning: Se bok eller föreläsningsanteckningar.

9. Visa att om f är en hel funktion och dessutom $|f| \leq \ln(1 + x^2 + y^2)$, så är $f = 0$. (5p)

Lösning: Tag godtycklig punkt z. Då f är hel gäller enligt Cauchys integralformel för derivatan att för alla $R > 0$ har vi

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw.$$

Notera att på cirkeln $C(z, R)$ har vi $|w| \leq R + |z|$. Välj R sådan att $R > |z|$, då är $|w| \leq 2R$. Med hjälp av triangelolikheten för integraler, antagandet $|f(w)| \leq \ln(1 + |w|^2)$ samt $|w| \leq 2R$ får vi att

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \leq \frac{1}{R} \sup_{|w-z|=R} \ln(1+|w|^2) \leq \frac{\ln(1 + 4R^2)}{R}.$$

Det är standard att högerledet går mot noll då R går mot ∞. Men olikheten gällde för alla $R > 0$ vilket ger oss att $f'(z) = 0$. Då z var vald godtyckligt får vi att $f' = 0$, vilket enligt sats ger att f är konstant. Men enligt antagandet är $|f(0)| \leq \ln(1) = 0$ dvs $f(0) = 0$, så vi får tillslut att $f = 0$.

Lycka till!
David