1. LÖSNINGAR MVE025/MVE295, 2014-10-30

1. Vi beräknar först antalet lösningar, dvs nollställen till $p(z) = 5z^4 - z^3 + z - 1/17$, i mängden där $|z| < 1$. Välj $f(z) = 5z^4$ och $g(z) = -z^3 + z - 1/17$. När $|z| = 1$ gäller

$$|f(z)| = 5$$

och

$$|g(z)| \leq |z^3| + |z| + 1/17 = 2 + 1/17.$$

Alltså är $|f| > |g|$, så Rouchès sats ger att $p = f + g$ och f har lika många nollställen i mängden där $|z| < 1$. Eftersom f har fyra nollställen har p det också.

Därefter beräknar vi antalet nollställen till p i mängden där $|z| < 1/2$. Nu väljer vi $f(z) = z$ och $g(z) = 5z^4 - z^3 - 1/17$. När $|z| = 1/2$ gäller

$$|f(z)| = 1/2$$

och

$$|g(z)| = |5z^4 - z^3 - 1/17| \leq 5/16 + 1/8 + 1/17 < 1/2.$$

Alltså är $|f| > |g|$, så Rouchès sats ger att $p = f + g$ och f har lika många nollställen i mängden där $|z| < 1/2$. Eftersom f har 1 nollställe där har p det också. Slutligen har alltså p 4-1=3 stycken nollställen i ringen där $1/2 < |z| < 1$.

2. Låt

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 2ax + b} dx;$$

integralen vi vill beräkna är imaginärdelen av I. Låt

$$I_R = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2 + 2ax + b} dx$$

för R stort; $I = \lim_{R \to \infty} I_R$. Låt $\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$ vara halvcirkeln med radie R och bas intervallet från $-R$ till R. Betrakta

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz,$$

där

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 2az + b}.$$

f:s singulära punkter är lösningarna till ekvationen $z^2 + 2az + b = 0$ dvs

$$z = -a \pm \sqrt{a^2 - b} = -a \pm i\sqrt{b - a^2}.$$

Den enda singulära punkten innanför Γ_R är $z_0 = -a + i\sqrt{b - a^2}$. Residysatsen ger att

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i Res_{z_0}(f) = \frac{e^{iz_0}}{2z_0 + 2a} = \frac{\pi e^{-ia} e^{-\sqrt{b-a^2}}}{\sqrt{b - a^2}}.$$

Men

$$\int_{\Gamma_R} = \int_{I_R} + \int_{C_R},$$

och

$$|\int_{C_R}| \leq \pi R \max_{C_R} |f| \leq \frac{\pi R e^{-y}}{R^2 - 2aR - b}.$$

Alltså gäller att $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} = 0$, och det följer att

$$I = \lim I_R = \lim \int_{\Gamma_R} = \frac{\pi e^{-ia} e^{-\sqrt{b-a^2}}}{\sqrt{b - a^2}}.$$

Alltså är imaginärdelen av I lika med

$$\frac{-\pi \sin a \, e^{-\sqrt{b-a^2}}}{\sqrt{b - a^2}},$$

och det är lösningen av uppgiften.

3. Området begränsas av kurvan $|z - 1| = 1$ och Re-axeln, som har skärningspunkterna 0 och 2. Vi söker först en Möbiusavbildning som avbildar 0 på ∞ och 2 på 0, tex

$$f(z) = \frac{z - 2}{z}.$$

f avbildar Re-axeln på sig själv, och cirkeln $|z - 1| = 1$ på en linje genom origo som skär Re-axeln i rät vinkel, dvs Im-axeln. Området avbildas alltså på ett område som begränsas av dessa linjer, dvs en av kvadranterna. Eftersom i ligger i området och i avbildas på $1 + 2i$ måste bildområdet vara den första kvadranten. Det följer att f^2 avbildar vårt område på övre halvplanet, så lösningen är

$$\left(\frac{z - 2}{z}\right)^2.$$

4.a

Laplacetransformering ger

$$(s^2 - 5s + 6)\tilde{u}(s) - u'(0) - (s + 5)u(0) = 1/(s - 1),$$

och $s^2 - 5s + 6 = (s - 2)(s - 3)$, så

$$\tilde{u}(s) = \frac{1}{(s - 2)(s - 3)} + \frac{1}{(s - 1)(s - 2)(s - 3)}.$$

Med partialbråksupdelning får vi sedan

$$\tilde{u}(s) = \frac{1/2}{s - 1)} - \frac{2}{(s - 2)} + \frac{3/2}{(s - 3)}.$$

Inverstransformering ger sedan att

$$u(t) = (1/2)e^t - 2e^{2t} + (3/2)e^{3t}.$$

b. På liknande sätt får vi att

$$\tilde{u}(s) = \tilde{g}\frac{1}{s-2)(s-3)} + \frac{1}{(s-2)(s-3)}.$$

Inverstransformering ger då att

$$u(t) = g * (e^{3t} - e^{2t}) + e^{3t} - e^{2t}.$$

5. a.

$$f(z) = \frac{e^z}{1-\cos z}.$$

Serieutvecklingen av $\cos$ ger att

$$1 - \cos z = z^2/2! - z^4/4! + ... = z^2 g(z),$$

där g är holomorf, $g(0) = 1/2! \neq 0$ and $g'(0) = 0$. Nämnaren har därför ett nollställe av ordning 2, så f har en pol av ordning 2 (eftersom $e^0 \neq 0$).

b. Om vi låter $h(z) = e^z/g(z)$ så är $f = h(z)/z^2$. Residyn är då Res$= h'(0)$. Kvotregeln ger att

$$h'(0) = (e^0 g(0) - e^0 g'(0))/g^2(0) = 2,$$

så residyn är 2.

c. Residysatsen ger att

$$\int_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}_0(f) = 4\pi i,$$

eftersom 0 är den enda singulära punkten innanför kurvan.

8. Tag $R > 0$ så stort att alla p:s nollställen har belopp mindre än R. Residysatsen ger att

$$\int_{|z|=R} \frac{f'}{f} z dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}_{z_j} \frac{f' z}{f}.$$

Eftersom $f(z) = \Pi(z - z_j)$ (där varje z_j upprepas m_j gånger om multipliciteten är m_j) har vi att

$$f'/f = \sum 1/(z - z_j)$$

så

$$Res_{z_j} \frac{f' z}{f} = z_j.$$