

Komplex Analys

Konform avbildning.

§1 Avbildningar; några definitioner

Antag att funktionen $w=f(z)$ är definierad på ett område R i z -planet,

Om $R' = \{w=f(z) : z \in R\}$ så säger man att R avbildas på R' vid avbildningen $w=f(z)$.

R' kallas bilden av R .

Reellt beskrivning: $z = x+iy$, $w = u+iv \Rightarrow$

$$u+iv = f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y).$$

Def. En avbildning kallas omväändbart entydig (en 1-1 avbildning)

Om mot varje z svarar exakt ett w och omvänt.

• En punkt z kallas fixpunkt vid avbildningen $w=f(z)$, om $f(z)=z$.

EX. Låt $w=z^2$. Fixpunkterna fås ur villkoret $z^2=z$, dvs $z(z-1)=0$.
punkterna $z_0=0$ och $z_1=1$ är alltså de enda fixpunkterna.

§2 Några enkla avbildningar

1. Translation: $w=z+\beta$, β komplex, konstant

2. Rotation: $w=ze^{i\theta_0}$

Detta är en vridning; vinkeln $|\theta_0|$

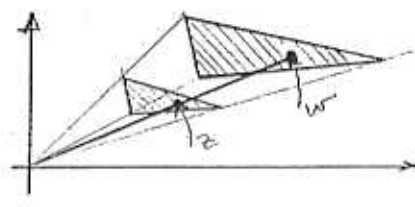
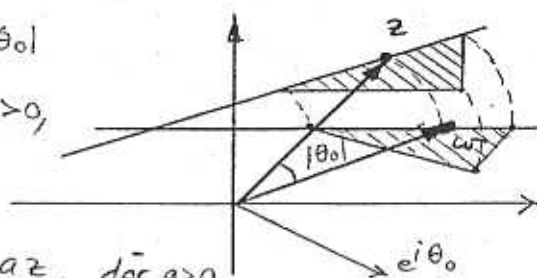
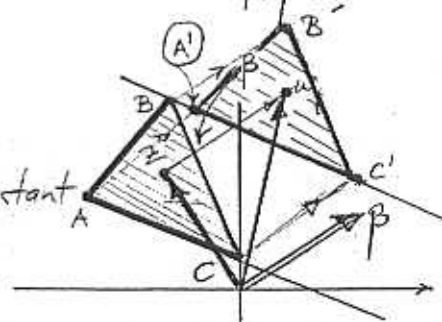
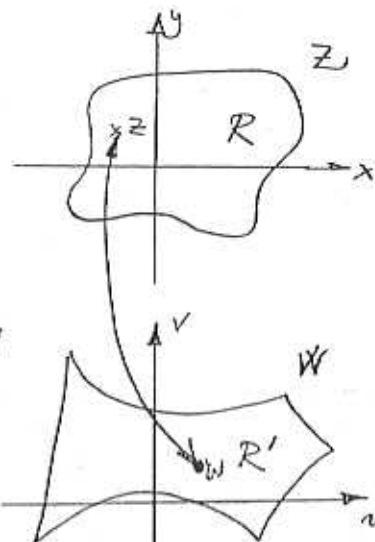
kring origo i positiv led om $\theta_0 > 0$,
i negativ led om $\theta_0 < 0$

3. Likställighetsavbildning: $w=az$, där $a > 0$.

(Origo kallas här likställighetscentrum)

$|a| > 1 \Rightarrow |w| > |z|$: Sträckning

$0 < |a| < 1 \Rightarrow |w| < |z|$: Krympning



4. linjär avbildning: $w = \alpha z + \beta$, (α, β komplexa konstanter)

Sätt $\alpha = a e^{i\theta_0}$ där $a = |\alpha| > 0$

$$\text{Om } \begin{cases} w_1 = a z & (\text{likstälthets avb.}) \\ w_2 = w_1 \cdot e^{i\theta_0} & (\text{rotation}) \\ w = w_2 + \beta & (\text{translation}) \end{cases}$$

Så blir $w = \alpha z + \beta$.

V varje linjär avbildning kan utföras genom en likstälthet, en rotation och en translation.

5. Invertering: $w = \frac{1}{z}$ (Egenskaper hos denna avb. senare)

§3 Möbiusavbildningar

Avbildningen $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, där α, β, γ och δ är komplexa konstanter sådana att $\alpha\delta \neq \beta\gamma$, kallas en Möbiusavbildning.

Anm. Om $\alpha\delta = \beta\gamma$ blir w konstant, dvs, hela z -planet skulle avbildas på en punkt i w -planet (Ett ointressant fall).

Det är oftast lämpligt att betrakta en Möbiusavb. $w = T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$; som en avbildning från utökade komplexa talplanet $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, till $\hat{\mathbb{C}}$.

Detta åstadkommes genom definitionerna:

$$\text{för } \gamma \neq 0: T(-\frac{\delta}{\gamma}) = \infty \quad \left(\lim_{z \rightarrow -\frac{\delta}{\gamma}} T(z) \right), \quad T(\infty) = \frac{\alpha}{\gamma} \quad \left(= \lim_{z \rightarrow \infty} T(z) \right)$$

$$\text{för } \gamma = 0 \quad T(\infty) = \infty.$$

T blir då en omväntbart entydig avbildning av $\hat{\mathbb{C}}$ på $\hat{\mathbb{C}}$ med inversen (för $\gamma \neq 0$)

$$z = T^{-1}(w) = \begin{cases} \frac{\delta w - \beta}{\alpha - \gamma w} & \text{för } w \neq \frac{\alpha}{\gamma}, w \neq \infty \\ \infty & \text{" } w = \frac{\alpha}{\gamma} \\ -\frac{\delta}{\gamma} & \text{" } w = \infty \end{cases}$$

Som också är en Möbiusavbildning

Anm.: Om $w = T_1(z)$ och $w = T_2(z)$ är Möbiusavbildningar, så är den sammansatta avbildningen $w = T_2 T_1(z)$ ($= T_2(T_1(z))$) också en Möbiusavbildning.

Sats 1. Varje Möbiustransformation kan erhållas m.h.a. successiv translation, rotation, inversering och inverstering

Beris. Man kan om $\gamma \neq 0$ göra omskrivningen

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma(\gamma z + \delta)} = \lambda + \frac{\mu}{z + \nu}$$

Om vi nu successivt gör avbildningarna; $w_1 = z + \nu$ (translation), $w_2 = \frac{1}{w_1}$ (inverstering), $w_3 = |\mu|w_2$ (skalning), $w_4 = w_3 e^{i \arg(\mu)}$ (rotation), och $w = \lambda + w_4$ (translation); så får vi den enkla avbildningen $z \mapsto w$.

Om $\gamma = 0$, är Möbiustransformationen en linjär avbildning och en sådan kan alltid utföras genom skalning, rotation och translation. VSB.

Sats 2. Möbiustransformation är bestämd av 3 punkter och deras bilder.

Om z_1, z_2, z_3 är tre skilda punkter i $\hat{\mathbb{C}}_{(z)}$ och w_1, w_2, w_3 är tre skilda punkter i $\hat{\mathbb{C}}_{(w)}$, så finns det precis en Möbiustransformation $w = T(z)$ sådan att $w_k = T(z_k)$, $k=1,2,3$. Den bestäms av sambandet

$$(1) \quad \frac{(w-w_1) \cdot (w_2-w_3)}{(w-w_3) \cdot (w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1) \cdot (z_2-z_3)}{(z-z_3) \cdot (z_2-z_1)} = \begin{cases} 0, & \text{om } z=z_1 \\ 1, & \text{om } z=z_2 \\ \infty, & \text{om } z=z_3 \end{cases}$$

Om ett z_k (och/eller w_k) är ∞ , så skall sambandet (1) modifieras genom att de paranteser där detta z_k (resp. w_k) ingår, ersätts med ettor.

Beris. I $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = T(z)$ vill vi bestämma de komplexa konstanterna α, β, γ och δ med $\alpha\delta \neq \beta\gamma$ så att $T(z_k) = w_k$, $k=1,2,3$. Antag först att ingen av de 6 punkterna är ∞ ; då är $\gamma z_k + \delta \neq 0$ för $k=1,2,3$.

Eftersom $w_k = \frac{\alpha z_k + \beta}{\gamma z_k + \delta}$ för $k=1,2,3$, så är för $\gamma z + \delta \neq 0$

$$w - w_k = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} - \frac{\alpha z_k + \beta}{\gamma z_k + \delta} = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(z - z_k)}{(\gamma z + \delta)(\gamma z_k + \delta)}$$

(Efter förenkling) och därmed genom division av dessa ledningar för $k=1,3$

$$\text{för } k \quad \frac{w-w_1}{w-w_3} = \frac{(z-z_1)(\gamma z_3 + \delta)}{(z-z_3)(\gamma z_1 + \delta)} \quad (2)$$

Byter vi här, $\{i, z_2\}$, \equiv mot z_2 och därmed w mot w_2 så får vi också

$$\frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_3} = \frac{(z_2 - z_1)(\gamma z_3 + \delta)}{(z_2 - z_3)(\gamma z_1 + \delta)} \quad (3)$$

Ledvis division av (2) med (3) ger nu (1).

Om man nu löser equation (1) m.o.p w så får man $T(z)$ och därmed de satta α, β, γ och δ . Eftersom dessa blir entydigt bestämda, finns det precis en Möbiusavbildning som uppfyller det givna villkoret.

Om nu z_k (och/eller w_k) = ∞ , så låter vi motv. z_k resp. w_k gå mot ∞ i (1).

T.ex. För vi för $w_2 = \infty$; $\frac{w - w_1}{w - w_3} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$

Om t.ex. dessutom $z_3 = \infty$ får vi

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \square$$

Ex. Bestäm den Möbiusavbildning $w = T(z)$ som avbildar, $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1$, på resp. $w_1 = -i, w_2 = 1, w_3 = i$. Vad blir då bilderna av punkterna $\pm i$?

Lösning. Avbildningen ges av. Sats 2 av sambandet

$$\frac{(w+i) \cdot (1-i)}{(w-i) \cdot (1+i)} = \frac{(z+1) \cdot (0-1)}{(z-1) \cdot (0+1)}$$

dvs $\frac{w+i}{w-i} = -\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{z+1}{z-1}$. Härav fås $w = \frac{i-z}{1+z} = T(z)$
och därmed $T(i) = 0$ och $T(-i) = \infty$. \square

Anm. I $\hat{\mathbb{C}}$ en rät linje kan uppfattas som ett gränsvfall av en cirkel med radie R , då $R \rightarrow \infty$. Dvs. Varje rät linje i $\hat{\mathbb{C}}$ går genom ∞ .

En cirkel kan däremot givetvis inte gå genom ∞ utan ligger helt i \mathbb{C} .

Def. Med en Cirkellinje i $\hat{\mathbb{C}}$ menas en vanlig cirkel (i \mathbb{C}) eller en rät linje (i $\hat{\mathbb{C}}$).

Sats 3. Varje Möbiusavbildning avbildar en godtycklig cirkellinje på en cirkellinje. Idé!; Bevisar för enkla avbildningar: translation, rotation, ökaställighet och invertering, eftersom varje Möbiusavb. kan erhållas mha. dessa avbildningar.

§ 4 Inversion och spegling - Symmetriprincipen

Inversion i Cirkeln $|z-\alpha|=r$:

Def. Avbildningen $z \mapsto w$, där $w-\alpha = \frac{r^2}{\bar{z}-\alpha}$, kallas inversion i cirkeln $|z-\alpha|=r$.

Om $w-\alpha = \frac{r^2}{\bar{z}-\alpha}$, så är $|w-\alpha| = \left| \frac{r^2}{\bar{z}-\alpha} \right| = \frac{r^2}{|z-\alpha|} = \frac{r^2}{|z-\alpha|}$,

dvs $|w-\alpha| |z-\alpha| = r^2$ och

$\arg(w-\alpha) = \arg \frac{r^2}{\bar{z}-\alpha} = \arg r^2 - \arg(\bar{z}-\alpha) = 0 - (-\arg(z-\alpha)) = \arg(z-\alpha)$.

Detta innebär geometriskt att: w och z (i samma komplexa talplan) ligger både på en stråle från punkten α och produkten av deras avstånd till denna punkt (α) är r^2 .

Geometrisk konstruktion.

Identifiera z med A , α med M
dra tangenterna AD & AB till Cirkeln

$\Gamma: |z-\alpha|=r$; Låt $E = AM \cap BD$

Den är E bilden w av z vid inversion i Γ .

Två likformiga triangler ger $\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{|MB|}{|ME|}$

dvs $|MA| |ME| = |MB|^2$ dvs $|z-\alpha| |w-\alpha| = r^2$.

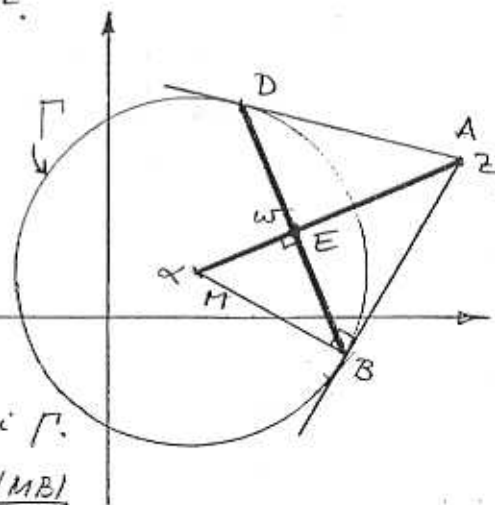
Dessutom är ju $\arg(w-\alpha) = \arg(z-\alpha)$; och därmed

$$(1) \quad \boxed{w-\alpha = \frac{r^2}{\bar{z}-\alpha}} \quad \Rightarrow \quad \left(z-\alpha = \frac{r^2}{\bar{w}-\alpha} \right)$$

Av konstruktionen inses omedelbart att punkter utanför Γ avbildas på punkter inom Γ och omvänt, samt att alla punkter på Γ är fixpunkter.

OBS! Inversion är inte en Möbiustransformation!

Speciellt $\alpha=0$, $r=1$ är inversion i enhetscirkeln: $w = \frac{1}{\bar{z}}$.



Ex. Inversion i cirkeln $|\bar{z} - \alpha| = r$ kan göras genom successiv

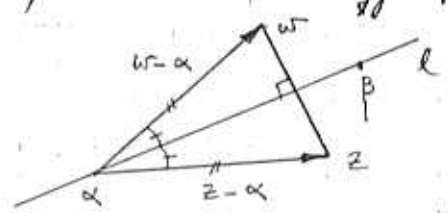
$$\left. \begin{array}{l} \text{translation: } w_1 = z - \alpha \\ \text{inversion i enhetscirkeln: } w_2 = \frac{1}{w_1} \\ \text{skalförändring: } w_3 = r^2 w_2 \\ \text{translation: } w = w_3 + \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{w - \alpha = \frac{r^2}{z - \alpha}}}$$

Vi behöver ytterligare en enkel typ av avbildning: Spiegling i en rät linje

Def. Punkten w sägs vara bilden av punkten z vid spiegling i den rätta linjen l

- Om ① w ligger på normalen från z mot l (s.k. n)
- ② mittpunkten på sträckan med ändpunkterna z och w ligger på l .

Om w är spiegeln av z i l är tydligen z spiegeln av w i l .



Sats 4. Formel för spiegling i en rät linje.

Punkten w är bilden av punkten z vid spiegling i den rätta linjen l genom punkterna α och β om och endast om

$$(2) \quad \boxed{w - \alpha = \frac{\beta - \alpha}{\bar{\beta} - \bar{\alpha}} \cdot (z - \alpha)}$$

Bevis: (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} |w - \alpha| = |\bar{z} - \alpha| = |z - \alpha|, & (\text{ty } |\bar{\beta} - \bar{\alpha}| = |\beta - \alpha|) \\ \arg(w - \alpha) - \arg(\beta - \alpha) = \arg(\bar{z} - \alpha) - \arg(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) \\ = \arg(\beta - \alpha) - \arg(z - \alpha), \end{cases}$

klart env. bilden omvä. \square

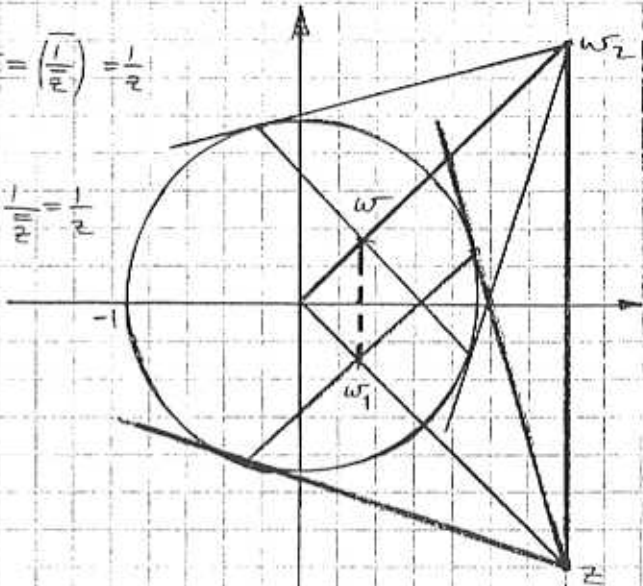
Anm. Speciellt om l är reellaxeln, är α & β reella och man får $w = \bar{z}$.

Obs! Spiegling i en rät linje är inte heller någon Möbius avbildning

Ex. 1. Möbiustransformationen invertering, dvs $w = \frac{1}{z}$, erhålls genom en inversion i enhetscirkeln följt av en spegling i realaxeln (eller dessa båda avbildningar i omvänd ordning).

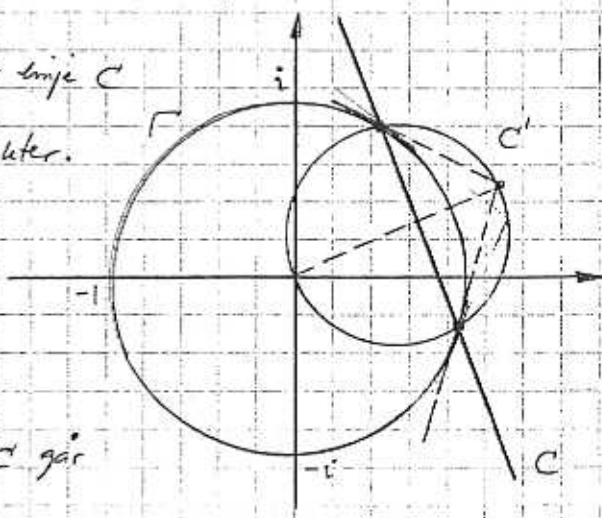
$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{z_1} \\ w &= \frac{1}{\overline{w_1}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow w = \left(\frac{1}{\overline{z_1}} \right) = \frac{1}{z_1}$$

$$\left. \begin{aligned} w_2 &= \overline{z_2} \\ w &= \frac{1}{\overline{w_2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow w = \frac{1}{\overline{\overline{z_2}}} = \frac{1}{z_2}$$



Ex. 2. Bestäm bilden av en cirkellinje vid inversion i enhetscirkeln. Inversion i enhetscirkeln, dvs $w = \frac{1}{z}$, kan erhållas genom en invertering följt av en spegling i realaxeln. Vid invertering (en Möbiustransformation) avbildas en cirkellinje på en cirkellinje (Sats 3). Detsamma gäller trivialt vid spegling i realaxeln och därmed även vid inversion i enhetscirkeln. Den bildade cirkellinjen erhåller mha. kända egenskaper för inversionen (se fig.)

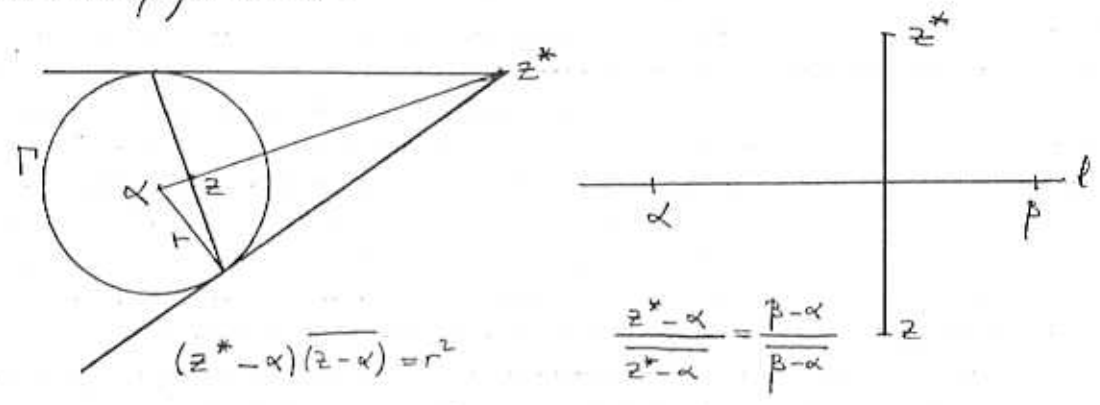
Fall 1. Givna cirkellinjen är en rät linje C som skär enhetscirkeln Γ i två punkter. Eftersom dessa är fixpunkter vid avbildningen, går den sökta cirkellinjen C' genom dessa. Bilden av ∞ är 0 ; eftersom C går genom ∞ , går C' genom 0 . C' är alltså en cirkel genom origo.



- De andra fallen: GDS
- C rät linje utanför Γ .
 - C är en cirkel som skär Γ men inte går genom origo (0). O.S.V.

Def. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Symmetriska} \\ \text{Inversa punkter} \\ \text{"konjugerade"} \end{array} \right\}$ m.a.p. cirkellinje.

punkterna z och z^* kallas inversa m.a.p. cirkeln Γ om de är varandras inversionsbilder i Γ . De kallas inversa m.a.p. den rätta linjen l om de är varandras spegelbilder i l .



Sats 5. Symmetriprincipen vid Möbiusaubildning

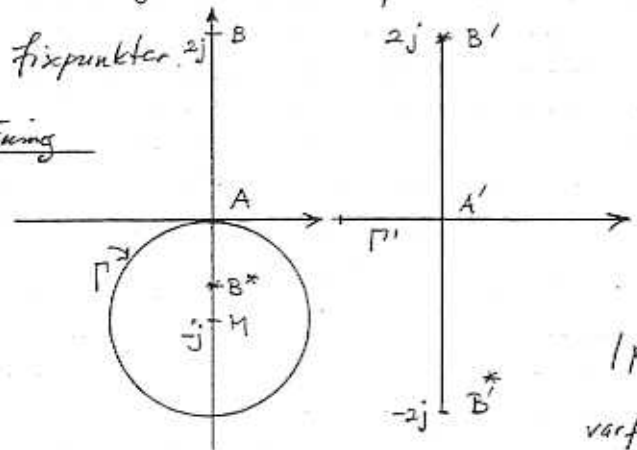
Da en Möbiusaub. avbildar cirkellinjen Γ på cirkellinjen Γ' så avbildas också varje par av inversa punkter z och z^* m.a.p. Γ på ett par av inversa punkter w och w^* m.a.p. Γ' .

Om Möbiusaubildningen T avbildar Γ på Γ' , så gäller alltså $w = T(z)$, $w^* = T(z^*)$.

Mo proof.

Ex 3. Bestäm den Möbiusaubildning $w = T(z)$, som avbildar cirkeln med centrum i punkten $-j$ och radien 1 på realaxeln och vid vilken punkten 0 och z_j är fixpunkter.

Lösning



Bestäm först den inversa punkten B^* till $B (= z_j)$ m.a.p. cirkeln Γ : $|z + j| = 1$;
 $|MB^*|/|MB| = 1^2 \Rightarrow |MB^*| = \frac{1}{3}$
 varför B^* är punkten $-\frac{2}{3}j$ (se fig).

Den inversa punkten B'^* till $B' (= z_j)$ m.a.p. realaxeln Γ' är punkten $-z_j$. Vi vet alltså $T(0) = 0$, $T(z_j) = z_j$, och enl. symmetriprincipen $T(-\frac{2}{3}j) = -z_j$.

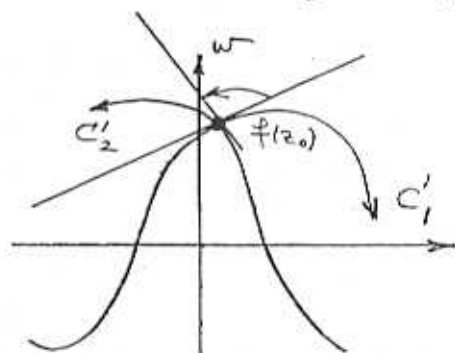
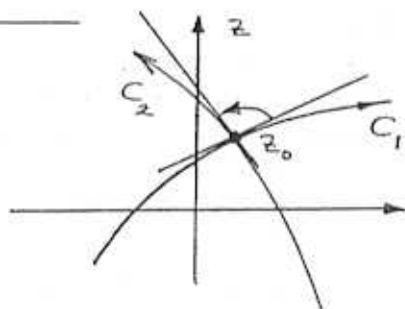
Avbildningen är då enl. Sats 2 bestämd av sambandet: $\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$

$$\frac{(w - 0)(z_j + z_j)}{(w + z_j)(z_j - 0)} = \frac{(z - 0)(z_j + \frac{2}{3}j)}{(z + \frac{2}{3}j)(z_j - 0)}, \text{ varav } w = \frac{4jz}{z + z_j}$$

Allmänna analytiska avbildningar, Konforma avbildningar

Def. En avbildning $w = f(z)$ kallas konform i punkten $z_0 \in D_f$, om den bibehåller alla vinklar i punkten z_0 till storleke och riktning.

Detta innebär att om C_1 och C_2 är två orienterade kurvor med tangenter i den gemensamma punkten z_0 , vilken av $w = f(z)$ avbildas på två orienterade kurvor C'_1 och C'_2 med tangenter i den gemensamma punkten $f(z_0)$, så skall den riktade vinkeln i z_0 mellan (tangenterna till) C_1 och C_2 vara lika med den riktade vinkeln i $f(z_0)$ mellan (tangenterna till) C'_1 och C'_2 (se fig.)



Anm. En avbildning, som bibehåller vinklarnas storleke (men inte nödvändigtvis deras riktning) kallas isogonal.

Ex. är spegling i en rät linje isogonal men inte konform.

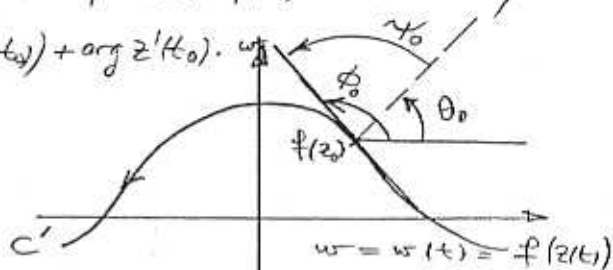
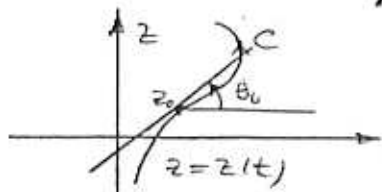
Sats 6. Tillräckligt villkor för att avbildningen $w = f(z)$ är konform.

Antag att $f(z)$ är analytisk på ett område R . Θ^0 är avbildningen $w = f(z)$ konform i varje punkt $z_0 \in R$ sådan att $f'(z_0) \neq 0$.

Bevis. Betrakta en glatt kurva C genom z_0 : $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, $z_0 = z(t_0)$, $z'(t)$ kont. och $\neq 0$. Tangenten till C i z_0 har riktn. vinkeln $\theta_0 = \arg z'(t_0)$. Bildkurvan C' av C vid avb. $w = f(z)$ blir $w = w(t) = f(z(t))$, $a \leq t \leq b$. Kedjeregeln $\Rightarrow w'(z) = f'(z(t)) \cdot z'(t)$.

Om $f'(z_0) \neq 0$, har C' en tangent i punkten $f(z_0)$ med riktningsvinkeln

$$(1) \quad \phi_0 = \arg w'(t_0) = \arg f'(z(t_0)) + \arg z'(t_0).$$

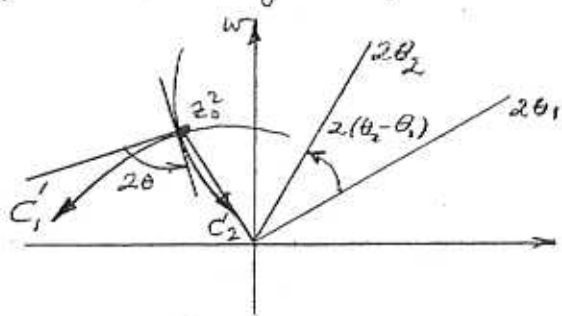
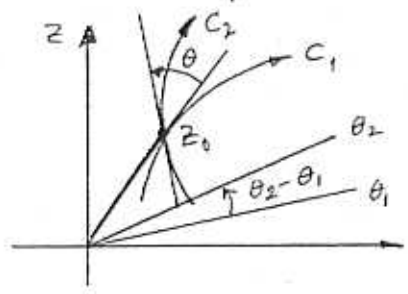


Sätt nu $\arg f'(z_0) = \psi_0$. Då är val- (1) $\phi_0 = \psi_0 + \theta_0$. Detta innebär att vid avbildningen $w = f(z)$ vrids varje orienterad kurva genom z_0 vinkeln ψ_0 i pos. el. neg. led beroende på tecknet; denna vridning är i regel olika stor i olika punkter z_0 . Då måste den riktade vinkeln mellan två kurvor genom punkten z_0 avbildas på en lika stor riktad vinkel mellan bildkurvorna genom punkten $f(z_0)$, ty båda kurvorna vrids lika mycket just i punkten z_0 vid avbildningen; nämligen vinkeln $\arg f'(z_0)$. \square

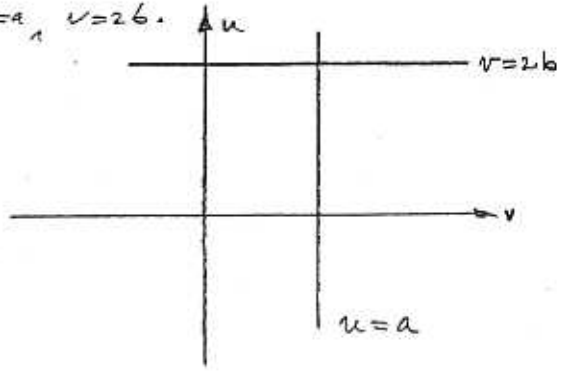
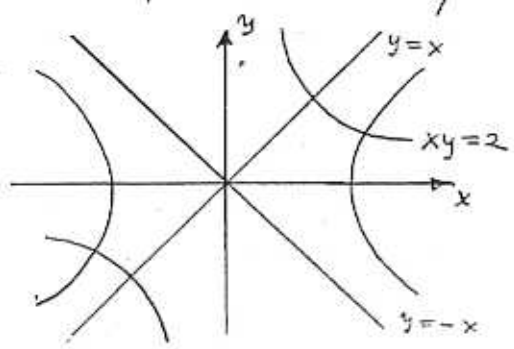
Def. En punkt z_0 sådan att $f'(z_0) = 0$ kallas en kritisk punkt till avb. $w = f(z)$.

Ex. Beträkta $w = z^2 = f(z)$. $f'(z) = 2z \Rightarrow$ avb. konform i alla punkter $z \neq 0$. punkten $z = 0$ är en kritisk punkt. Sats 6 säger ingenting om konformitet för avb. i punkten 0. Därför berättar vi dock (se nedan) att vinklar i punkten 0 fördubblas vid denna avbildning, dvs avbildningen $w = z^2$ är inte konform i punkten $z = 0$

$z = re^{i\theta} \Rightarrow w = z^2 = r^2 e^{2i\theta}$. Strållorna $\arg z = \theta_1$ och $\arg z = \theta_2$ avbildas alltså på strålorna $\arg w = 2\theta_1$ och $\arg w = 2\theta_2$. Dvs vinklarna fördubblas.



Ex. De vinkelräta hyperbelerna $x^2 - y^2 = a > 0$ & $xy = b$ vid avb. $w = z^2$ avbildas på vinkelräta linjerna $u = a$, $v = 2b$.



$z = x + iy$
 $w = z^2 = (x + iy)(x + iy) = x^2 + y^2 + 2ixy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 + y^2 = a \\ v = 2xy = 2b. \end{cases}$

Anm. Längdskalan vid avbildningen $w=f(z)$ i punkten z_0 är $|f'(z_0)|$;

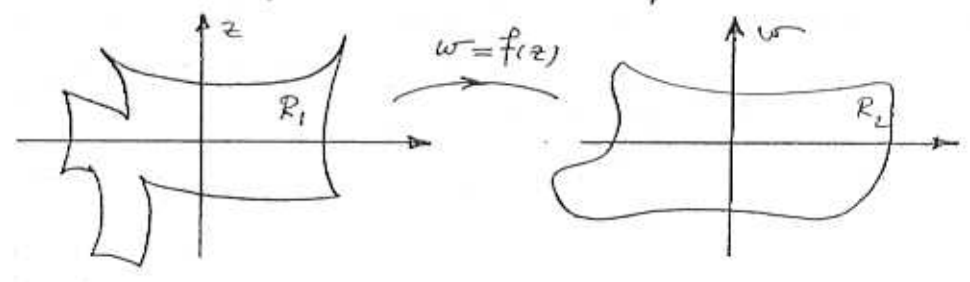
eftersom $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overbrace{|f(z)-f(z_0)|}^{\text{avst. mellan bildpunkter}}}{\underbrace{|z-z_0|}_{\text{avst. mellan givna punkter}}} = |f'(z_0)|$

Areaskalen är då $|f'(z_0)|^2 = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ (tagen i punkten (x_0, y_0))

PB $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{Cauchy-Riemann} \\ (v'_x = -u'_y, v'_y = u'_x) \end{matrix} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ -u'_y & u'_x \end{vmatrix} = u'^2_x + u'^2_y = |f'(z_0)|^2$
 (OBS: $f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) - i u'_y(x_0, y_0)$).
 evaluate i (x_0, y_0)

Riemann avbildningsats

Existenssats. Låt R_1 och R_2 vara två godty. enkelt-sammanhängande områden (simply connected); ($R_1 \neq \mathbb{C}, R_2 \neq \mathbb{C}$). Då finns det en analytisk funktion $w=f(z)$ som avbildar R_1 på R_2 .

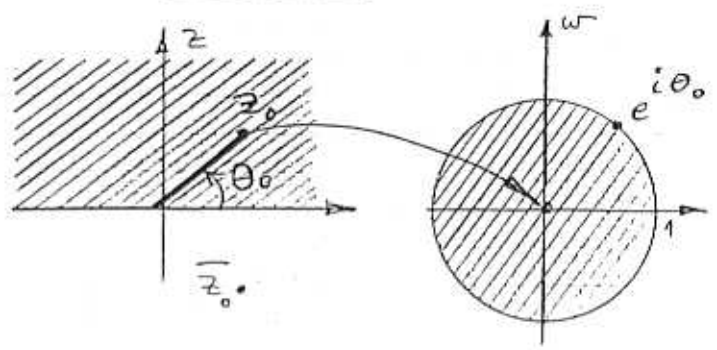


§ 6 Några speciella avbildningar (Tillämpn. i potential problem)

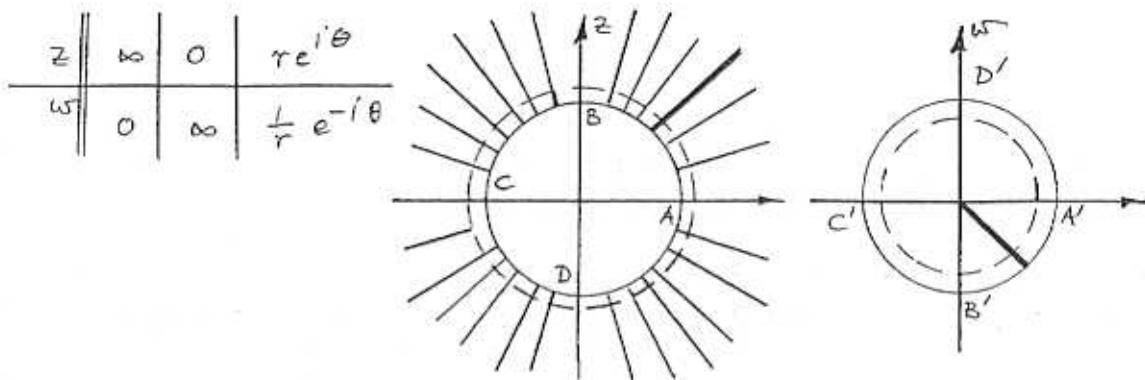
Avbildningar på enhetscirkeln $|w| \leq 1$

I. Övre halvplanet på området inom enhetscirkeln: $w = e^{i\theta_0} \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$
 (Möbiusavbildning) OBS: Cirkelkivon

z	z_0	\bar{z}_0	∞
w	0	∞	$e^{i\theta_0}$



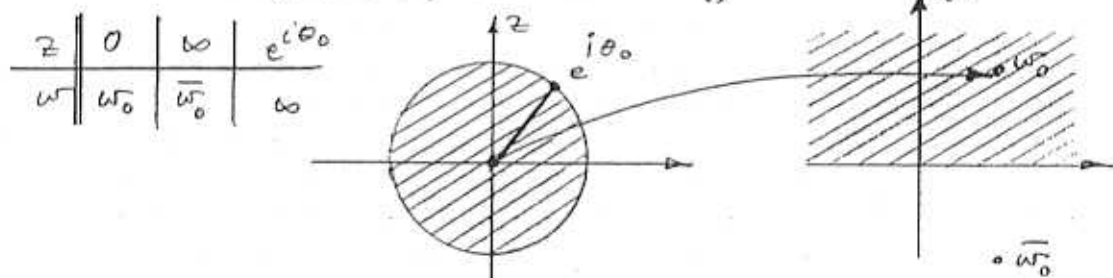
II. Området utanför enhetscirkeln på området inom enhetscirkeln: $w = \frac{1}{z}$



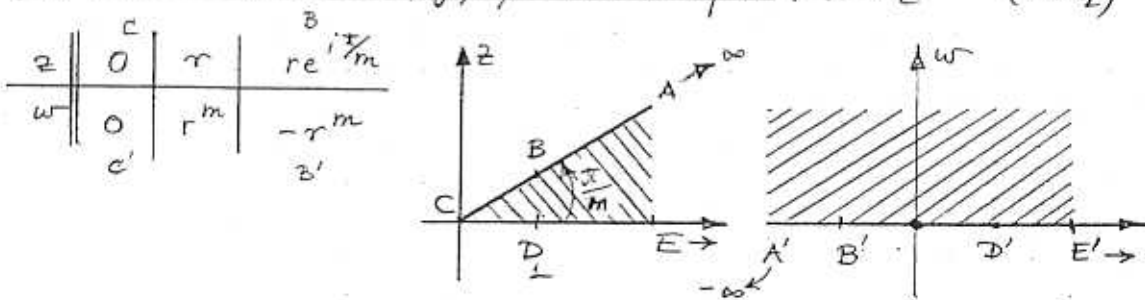
Avbildningar på Övre halvplanet

III. Enhetscirkel (shivan) på övre halvplanet: $z = e^{i\theta_0} \cdot \frac{w - w_0}{w - \bar{w}_0}$, där

w_0 löses ut (jfr med I; Möbiustransformation)

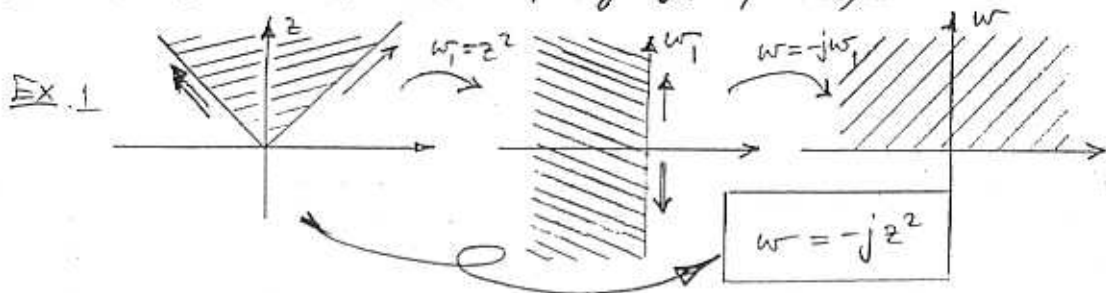


IV. Vinkelområde (se fig.) på övre halvplanet: $w = z^m$ ($m > \frac{1}{2}$)

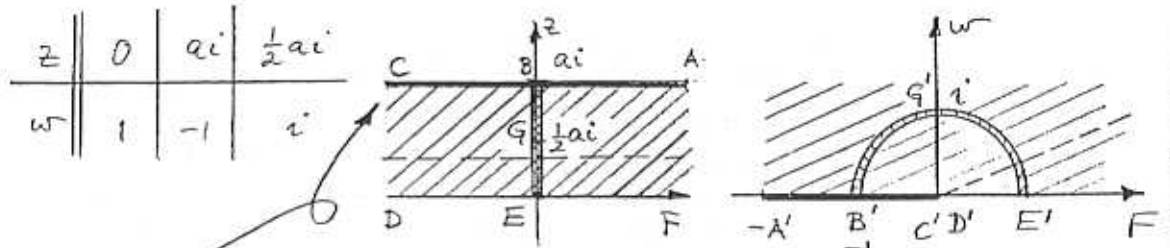


Viktiga specialfall: $\begin{cases} m=2; & (\text{övre halvplanet} \rightarrow \text{halvplanet}) \\ m=4; & (\text{övre halvplanet} \rightarrow \text{övre halvplanet}) \end{cases}$

OBS! För m sådana att z^m är flertydig väljs rätt gren.



V. Band på Övre halukplan: $w = e^{\frac{\pi}{a}z}$ (a är bandets bredd)

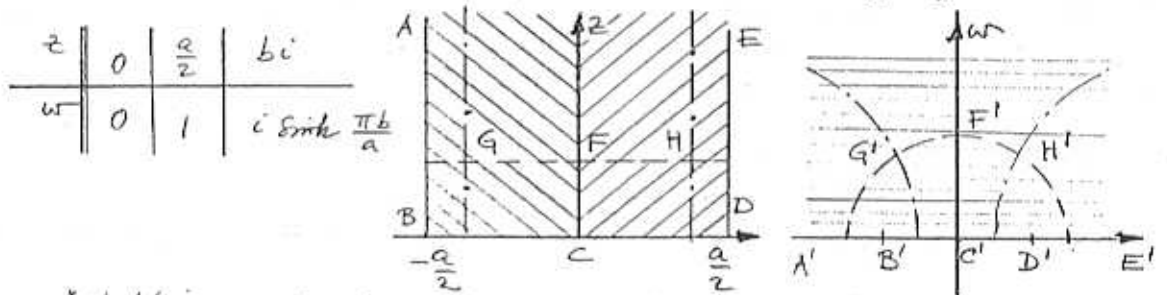


$$z = x + ai \Rightarrow w = e^{\frac{\pi}{a}x + \pi i} = -e^{\frac{\pi}{a}x} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{då } x \rightarrow -\infty \\ -a & \text{då } x \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$z = x \Rightarrow w = e^{\frac{\pi}{a}x} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{då } x \rightarrow -\infty \\ a & \text{då } x \rightarrow \infty \end{cases}$$

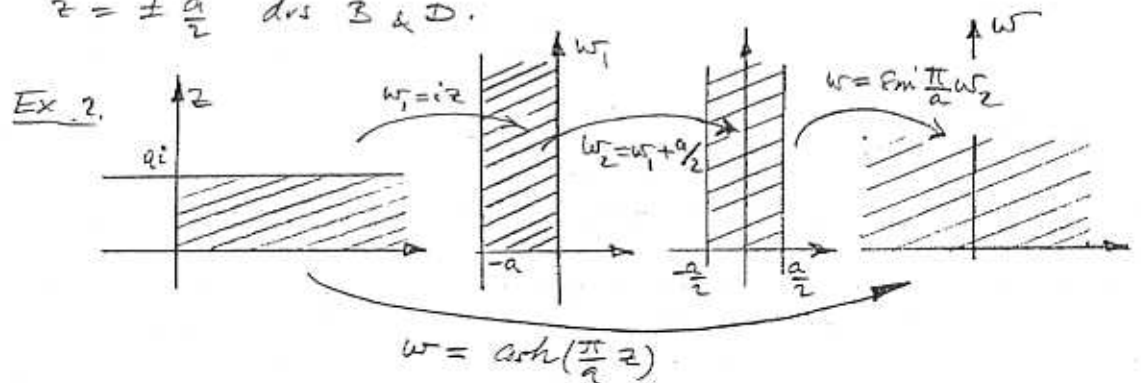
$0 < b < a (\Rightarrow \frac{b}{a} < 1)$, $z = x + bi \Rightarrow w = e^{\frac{\pi}{a}x} \cdot e^{\frac{\pi b}{a}i}$
 som ger en stråle från origo i w-planet då $-\infty < x < \infty$.

VI. Haluband på Övre halukplanet: $w = \sin(\frac{\pi}{a}z)$

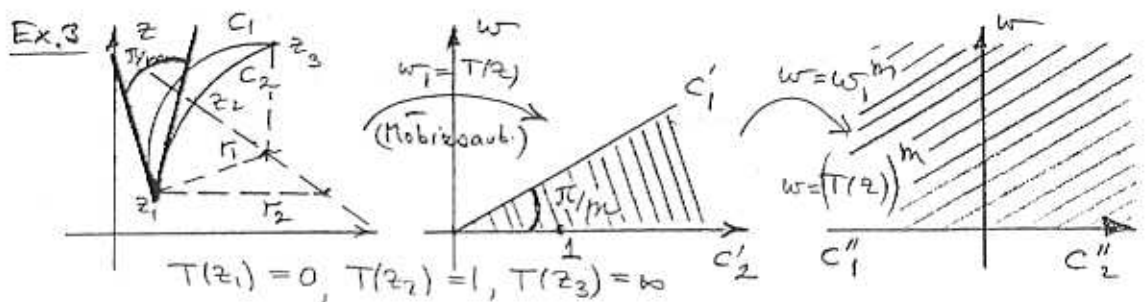


Avbildningen är ej konform i punkterna

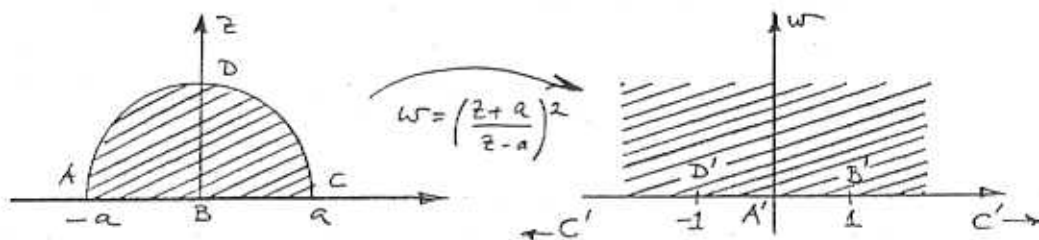
$z = \pm \frac{a}{2}$ dvs B & D.



$$w = \sin \frac{\pi}{a} w_2 = \sin \frac{\pi}{a} \left(w_1 + \frac{a}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{a} w_1 + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{a} w_1 \right) = \cos \left(\frac{\pi}{a} i z \right) = \operatorname{arsh} \left(\frac{\pi}{a} z \right)$$



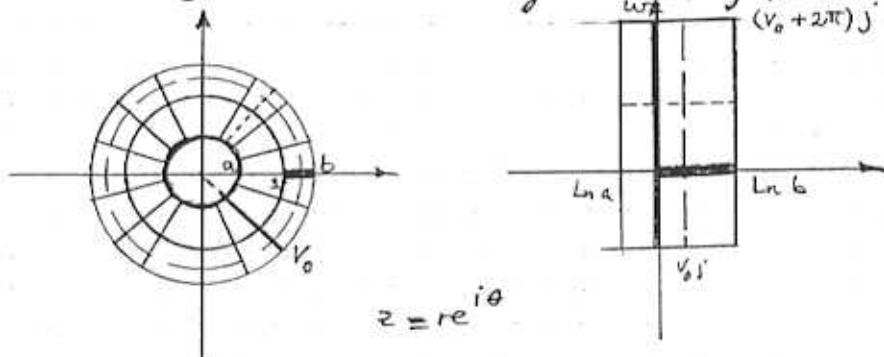
Specialfall: Avbildning av halvcirkelområde på övre halvplanet: $w = \left(\frac{z+a}{z-a}\right)^2$



Avbildningen är inte konform på $z = -a$ (A).

Andra avbildningar

VI. Cirkulering på rektangel: $w = \log z$ (lömplig gren)



$$w = \log z = \ln r + i\theta, \quad a \leq r \leq b, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$$

§7 Elektrostatiska tillämpningar av konform avbildning

Def. En reellvärd funktion $h(x, y)$ kallas harmonisk på ett område R om

1. $h(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator av 2:a ordningen på R ;
2. $h''_{xx} + h''_{yy} = 0$ på R (Laplace's ekvation).

Sambandet mellan analytiska och harmoniska funktioner:

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \text{ analytisk på ett öppet område } R \Rightarrow$$

$z = x + iy$

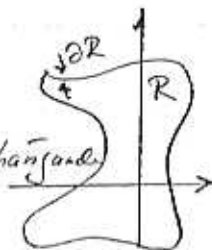
$u(x, y)$ & $v(x, y)$ harmoniska funktioner på R .

Dirichlets och Neumanns randvärdesproblem

Dirichlets problem: Bestäm en funktion $\phi(x, y)$

som är harmonisk på det inre av ett givet, enkelt-sammanhängande område R och som antar förutgivna värden på ∂R :

- (1) $\phi''_{xx} + \phi''_{yy} = 0$ på $R, \partial R$
- (2) $\phi(x, y) = \alpha(x, y)$ på ∂R (randvillkor); $\alpha(x, y)$ given funktion-



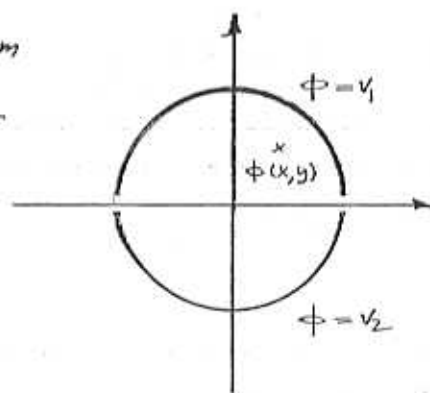
Neumanns Problem

Motsvarande problem (jfr Dirichlets Problem) där randvillkoren uttrycks med

$$(2)' \quad \frac{\partial \phi}{\partial n}(x, y) = \beta(x, y) \text{ på } \partial R; \quad \beta(x, y) \text{ given funktion.}$$

Anm. Normalderivatan $\frac{\partial \phi}{\partial n}(x, y) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\phi(x+sn_x, y+sn_y) - \phi(x, y)}{s}$
 $= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\phi(x+sn) - \phi(x)}{s}$, där $n = (n_x, n_y)$ är utåtriktad-enhetsnormalvektor till ∂R i punkten $X = (x, y)$; $\frac{\partial \phi}{\partial n} = n \cdot \nabla \phi$.

Man kan visa att dessa båda randvärdesproblem; (Dirichlets & Neumanns) har entydiga lösningar (för Neumann's problem så när som på en additiv konstant) under vissa regularitetsvillkor på randen ∂R och på den givna funktionen $\alpha(x, y)$ (resp. $\beta(x, y)$).



Sats 7.

a) Antag att

1^o: $h(u, v)$ är harmoniska på R_w i w -planet, $w = u + iv$.

2^o: $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ är en analytisk funktion som avbildar ett område R_z i z -planet på R_w , $z = x + iy$.

Då är $H(x, y) = h(u(x, y), v(x, y))$ harmoniska på R_z .

b) Antag vidare att

3^o: $f(z)$ avbildar en glatt kurva C i z -planet på en kurva Γ i w -planet.

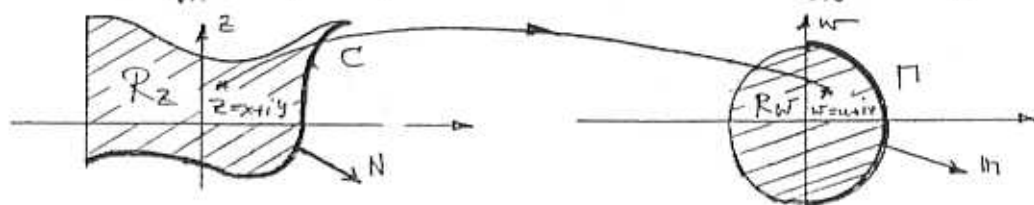
Om då $h(u, v) = a$ (konstant) på Γ , så är $H(x, y) = a$ på C .

c) Antag slutligen att dessutom

4^o: $f(z)$ är konform på C ;

5^o: h'_u och h'_v är kontinuerliga på Γ .

Om då $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$ på Γ , så är normalderivatan $\frac{\partial H}{\partial N} = 0$ på C .



Metod för behandling av potentialproblem med konform avbildning

Problem: (1) $\phi_{xx}'' + \phi_{yy}'' = 0$ $\phi \in \mathcal{R}_z$

(2) $\phi(x, y) = a$ (eller $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$) $\phi \in \mathcal{R}_z$

- Avbildna \mathcal{R}_z på ett "enkelt" område \mathcal{R}_w (t.ex. ett halvplan) med hjälp av en analytisk funktion
- Översätt det givna problemet till ett motsvarande problem för \mathcal{R}_w .
- Lös problemet för \mathcal{R}_w .
- Översätt med hjälp av sats 7 den erhållna lösningen till en lösning för det givna problemet för \mathcal{R}_z .

Ex. 1 Potentialen i ett halvplan:

Bestäm en harmonisk funktion $\phi(x, y)$ i övre halvplanet ($y > 0$) med randvärdena

$$\alpha(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{för } x > 0 \\ 0 & \text{för } x < 0. \end{cases}$$

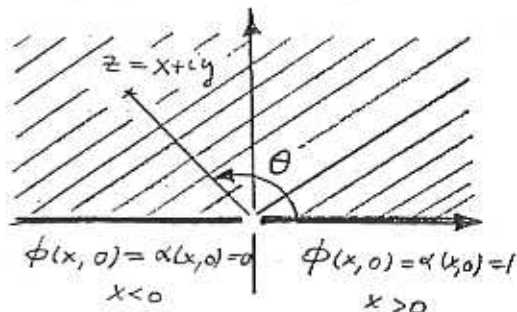
Lösning. $g(z) = A \log z + iB$ är analytisk i övre halvplanet:

Lägg en snittlinje längs negativa imaginäraxeln och välj $0 \leq \arg z \leq \pi$.

$$g(z) = A \ln|z| + i(A\theta + B), \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Da° är $\text{Im} g(z) = A\theta + B$ harmonisk i övre halvplanet.

$$\left. \begin{aligned} \cot \theta &= \frac{x}{y} \\ 0 < \theta < \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta = \text{arccot} \frac{x}{y}$$



OBS! arctan kan inte användas

eftersom denna funktion antar

värden mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$.

(Om vi önskar, kan vi ta $\tan^{-1} a$ beteckna den vinkel mellan 0 och π

vars tangens är a ; da° är $\tan^{-1} \theta$ ej detsamma som $\text{arctan} \theta$.

Vi kan därmed skriva $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \text{arccot} \frac{x}{y}$. T.ex. är

$\tan^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$ medan $\text{arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$; $\tan^{-1} 1 = \text{arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Randvillkoren ger nu

$$\left. \begin{aligned} A \cdot 0 + B &= 1 \\ A \cdot \pi + B &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{\pi}, B = 1$$

Alltså är

$$\phi(x, y) = 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arccot} \frac{x}{y} \quad \left(= 1 - \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x} \right).$$

Ex. 2. En lång, rät cirkulär cylinder är delad på längden i två halvor av ledande material isolerade från varandra. Den ena halvan är jordad och den andra hålles vid den konstanta potentialen V_0 . Bestäm potentialen $\phi(x, y)$ i en godtycklig punkt (x, y) inuti cylindern.

Cylinderns tvärsnitt är enhetscirkel (med tangenten längdenhet).

Avbildna cirkeln på övre halvplanet så att

övre halv cirkeln (där $\phi \equiv 0$) avbildas

på positiva reellaxeln och undre halv cirkeln

(där $\phi \equiv V_0$) på negativa reellaxeln:

$$(*) \quad w = i \frac{1-z}{1+z} \quad (\text{Möbiusaubildning})$$

Analogt med ex. 1 kan vi sedan ta

$$\phi(u, v) = \frac{V_0}{\pi} \theta = \frac{V_0}{\pi} \operatorname{arccot} \frac{u}{v}$$

med $w = u+iv$ & $z = x+iy$ (*) \Rightarrow

$$u+iv = i \frac{1-x-iy}{1+x+iy} = i \frac{(1-x-iy)(1-x-iy)}{(1+x)^2+y^2} = \frac{2y + i(1-x^2-y^2)}{(1+x)^2+y^2}$$

$$\text{Alltså är } \phi(x, y) = \frac{V_0}{\pi} \operatorname{arccot} \left(\frac{2y}{1-x^2-y^2} \right).$$

$$\text{Särskilt är } \phi(x, 0) = \frac{V_0}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{V_0}{2}; \quad -1 < x < 1.$$

Elektripotentialkurvor: $\frac{2y}{1-x^2-y^2} = C$ (Cirkelbögar genom $(\pm 1, 0)$)

$$\begin{aligned} (2y) &\Leftrightarrow 2y = C(1-x^2-y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2}{C}y = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y + \frac{1}{C})^2 = 1 + \frac{1}{C^2} \end{aligned}$$

