Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa

MATEMATIK Telefon: 0762186654

Chalmers tekniska högskola 2005–03–12 kl. 08.45–13.45

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Med hjälp av utveckling i Fourier-Bessel serie hitta en radial lösning $u(r,t)$ av randvärdeproblem för värmeekvationen

$$u_t = \Delta u - u$$

i cirkelskivan $r < 2$ med begynnelsevillkoret $u(r,0) = 4 - r^2, 1 \le r \le 2$, $u(r,0) = 3, r < 1$ och randvillkoret $u(r,t) = 0$ för $r = 2$.

2. Hitta andragradpolynomet $P(x)$ som minimerar $\int_1^2 |x^3 - P(x)|^2 x^{-1} dx$.

3. Med hjälp av konforma avbildningar hitta den elektrostatiska potentialen u i området

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2, \;\; x, y > 0, x^2 + y^2 < 1$$

som är lika med 0 på y-axeln $x = 0$, lika med 1 på cirkelbågen $x^2 + y^2 = 1$, lika med -1 på intervallet $0 < x < \frac{1}{2}$ på x-axeln, och lika med 0 för $x > \frac{1}{2}$ på x-axeln.

4. Funktionen $f(x)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\xi)$ där $\hat{f}(\xi) = 1$ på 3 intervall $2^n < x < 2^{n+1}$, $n = 1, 3, 5$, $\hat{f}(\xi) = -1$ på 3 intervall $2^n < x < 2^{n+1}$, $n = 2, 4, 6$, och $\hat{f}(\xi) = 0$ utanför dessa 6 intervall. Hitta $f*f*f$, $f*f*f*f$, $f*f*f*f*f$ $f*f*f*f*f*f$ och $\int_{-\infty}^{\infty} |f*g|^2 dx$, $g(x) = \frac{\sin(5x)}{x}$.

5. Lös med hjälp av utvecklingen i Fourier serie i egenfunktioner av ett passande Sturm-Liouville problem vågekvationen

$$u_{tt} = u_{xx} + u_x, 0 < x < \pi, t > 0$$

med randvillkoren $u(0,t) = 0, 2u_x(\pi,t) + u(\pi,t) = 3$ och begynnelsevillkoren $u(x,0) = x$, $u_t(x,0) = \sin(x)$. (Tips: skriv $u_{xx} + u_x$ som $e^{-x}(e^x u_x)_x$ för att få S-L problemet och bestäma viktfunktionen.)

6. Utveckla funktionen $f(\theta) = \exp(-\theta)$ i en komplex Fourierserie på intervallet $(-\pi, \pi)$. Vilka formler ger serien för $\theta = 0, \pi/2, -\pi/2, -\pi, \pi$? Vilka Fourierutvecklingar får man med integrering av serien?? Med derivering av serien?? Formulera motsvarande regler.

7. Låt $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara ett ortonormalt system i $L^2(a,b)$. Ange tre villkor som alla var för sig är ekvivalent med att $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ar ett fullständigt system (en bas) i $L^2(a,b)$ (Sats 3.4). Beviset krävs.

8. Berätta så mycket du kan om linjära system, deras egenskaper, karakteristiker och Fouriertransformationsbaserade analysmetoder. Ge exempel.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas måndagen, den 28. mars. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 15.mars.

G.Rozenblioum

GR