TMA 132 2005-03-12 (1)

Lösningar

1. Vi söker enkla lösningar $u(r,t) = R(r)T(t)$; sätter in i ekvationen och delar variabler

$$\frac{T'}{T} + 1 = \frac{R'' + r^{-1}R}{R} = -\mu^2$$

R-ekvation

$$R'' + r^{-1}R + \mu^2 R = 0$$

randvillkoren $R(0)$ begränsad, $R(2) = 0$

lösningen

$$R(r) = J_0(\mu r)$$

μ hittas ur randvillkoret

$J_0(2\mu) = 0$; $2\mu = \lambda_n$ = nollställe för J_0. $\mu_n = \frac{\lambda_n}{2}$.

T-ekvationen $\frac{T'}{T} + 1 = -\mu_n^2$

$$T' = -(\mu_n^2 + 1)T \; ; \; T_n(t) = C_n e^{-(\mu_n^2+1)t}$$

Söker lösningen

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{\lambda_n}{2} r\right) e^{-\left(\frac{\lambda_n^2}{4}+1\right)t}$$

C_n söker ur begynnelsevillkoret

$$u(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{\lambda_n}{2} r\right) = \begin{cases} 4-r^2, & r \geq 1 \\ 3, & r < 1 \end{cases}$$

$$C_n = \left(\left\| J_0\left(\frac{\lambda_n}{2} r\right)\right\|_r^2\right)^{-1} \left(\int_0^1 3r J_0\left(\frac{\lambda_n}{2} r\right) dr + \int_1^2 (4-r^2) r J_0\left(\frac{\lambda_n}{2} r\right) dr\right)$$

Hilfsintegrale

$$A_n = \int_0^1 r J_0\left(\frac{\lambda_n}{2} r\right) dr \overset{s = \frac{\lambda_n}{2} r}{=} \left(\frac{2}{\lambda_n}\right)^2 \int_0^{\frac{\lambda_n}{2}} s J_0(s)\, ds = \qquad s J_0 = (s J_1)'$$

$$= \left(\frac{2}{\lambda_n}\right) \frac{\lambda_n}{2} J_1\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) = \frac{2}{\lambda_n} J_1\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)$$

$$B_n = \int_1^2 r J_0\left(\frac{\lambda_n}{2} r\right) = \left(\frac{2}{\lambda_n}\right)^2 \int_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\lambda_n} s J_0(s)\, ds$$

$$= \frac{2^2}{\lambda_n^2}\left(\lambda_n J_1(\lambda_n) - \frac{\lambda_n}{2} J_1\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\lambda_n}\left(2 J_1(\lambda_n) - J_1\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\right).$$

$$D_n = \int_1^2 r^3 J_0\left(\frac{\lambda_n}{2} r\right) dr = \left(\frac{2}{\lambda_n}\right)^4 \int_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\lambda_n} s^3 J_0(s)\, ds$$

$$= \left(\frac{2}{\lambda_n}\right)^4 \int_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\lambda_n} s^2 (s J_1(s))'\, ds = 2\left(\frac{2}{\lambda_n}\right)^4 \int_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\lambda_n} s^2 J_1(s)\, ds$$

$$= 2\left(\frac{2}{\lambda_n}\right)^4 s^2 J_2(s)\Big|_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\lambda_n} + \left(\frac{2}{\lambda_n}\right)^4 s^3 J_1(s)\Big|_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\lambda_n}$$

$$= 2\left(\frac{2}{\lambda_n}\right)^4 s^2 J_2(s)\Big|_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\lambda_n} + \left(\frac{2}{\lambda_n}\right)^4 s^3 J_1(s)\Big|_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\lambda_n}$$

$$C_n = (2 J_1(\lambda_n))^{-2} (3A_n + 4B_n - D_n).$$

2. Vi tar funktioner $f_0 = 1$, $f_1 = x$, $f_2 = x^2$ 3
och ortogonaliserar m.a.på vikten $w(x) = x^{-1}$
på intervallet $(1,2)$.

$$\|f_0\|^2 = \int_1^2 x^{-1}dx = \ln 2.$$

$$\varphi_0 = f_0 \; ; \quad \varphi_1 = f_1 - \frac{\langle f_1, \varphi_0\rangle}{\|\varphi_0\|^2}\varphi_0$$

$$\langle f_1, \varphi_0\rangle = \int_1^2 x \cdot x^{-1}dx = 1$$

$$\varphi_1 = x - \frac{1}{\ln 2} \; ; \quad \|\varphi_1\|^2 = \int_1^2 \left(x^2 - \frac{2}{\ln 2}x + \frac{1}{(\ln 2)^2}\right)x^{-1}dx$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{2}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2}$$

$$\varphi_2 = f_2 - \frac{\langle f_2, \varphi_0\rangle}{\|\varphi_0\|^2}\varphi_0 - \frac{\langle f_2, \varphi_1\rangle}{\|\varphi_1\|^2}\varphi_1$$

$$\langle f_2, \varphi_0\rangle = \int_1^2 x^2 x^{-1}dx = \frac{3}{2} \; ; \quad \langle f_2, \varphi_1\rangle$$

$$= \int_1^2 x^2\left(x - \frac{1}{\ln 2}\right)x^{-1}dx = \frac{7}{3} - \frac{3}{2\ln 2}$$

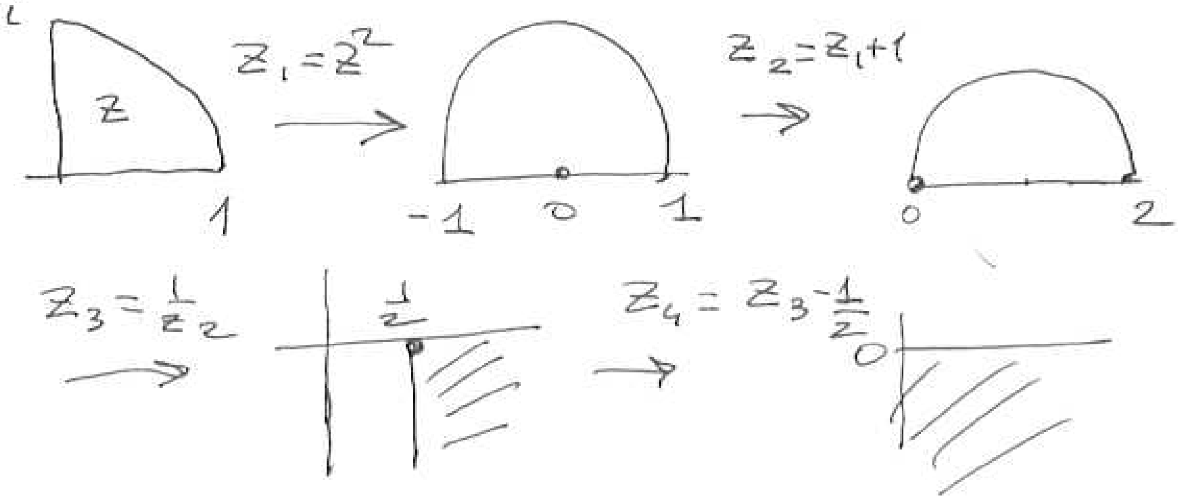
$$\varphi_2 = x^2 - \frac{3}{2\ln 2} - \frac{\left(\frac{7}{3} - \frac{3}{2\ln 2}\right)\left(x - \frac{1}{\ln 2}\right)}{\frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2}}$$

Bästa approximation $P(x) = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$

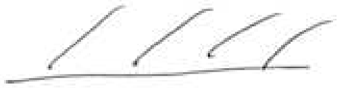
$$c_0 = \frac{\int_1^2 x^3\varphi_0(x)x^{-1}dx}{\|\varphi_0\|^2} \; ; \quad c_1 = \frac{\int_1^2 x^3\varphi_1(x)x^{-1}dx}{\|\varphi_1\|^2},$$

$$c_2 = \frac{\int_1^2 x^3\varphi_2(x)x^{-1}dx}{\|\varphi_2\|^2}$$ osv.

3. Vi konstruerar avbildningen $w = f(z)$ av vårt område på det övre halvplanet stegvis



$\rightarrow W = -z_4^2$



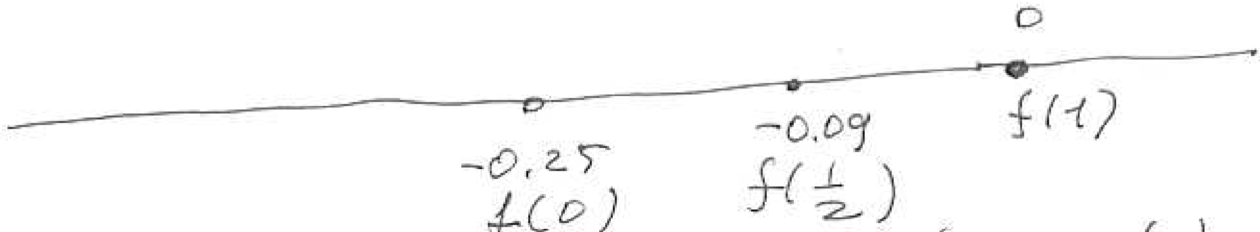
samlar avbildningen: $w = -(z_3 - \frac{1}{2})^2 = -(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{2})^2$

$= -\left(\frac{1}{z_1+1} - \frac{1}{2}\right)^2 = -\left(\frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{2}\right)^2 = f(z).$

Vi granskar vart intressanta punkter går:

$f(0) = -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right)^2 = -0.25$; $f(\frac{1}{2}) = -\left(\frac{1}{\frac{1}{4}+1} - \frac{1}{2}\right)^2 = -0.09$,

$f(1) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, $f(i) = \infty$.



Så vi kan se att intervallet $(0 < x < \frac{1}{2})$ på x-axeln går till $(-0.25, -0.09)$; intervallet $(\frac{1}{2} < x < 1)$ går till $(-0.09, 0]$ och bågen går till $(0, \infty)$.

Vi löser problemet Dirichlet i övre halvplanet Im $w > 0$:

$\Delta V(w) = 0$, $V = -1$ på $(-0{,}25, -0{,}09)$,

$V = 0$ på $(-0.09, 0)$, $V = 1$ på $(0, \infty)$

och $V = 0$ på $(-\infty, -0{,}25)$.

Vi söker $V(w)$ som

$$A + B\arg(w+0.25) + C\arg(w+0.09) + D\arg(w+0).$$

hittar A, B, C, D:

för $w \in (-\infty, -0{,}25)$: $A + B\pi + C\pi + D\pi = 0$

för $w \in (-0{,}25, -0{,}09)$: $A + C\pi + D\pi = -1$

för $w \in (-0.09, 0)$: $A + D\pi = 0$

för $w \in (0, \infty)$: $A = 1$

så har vi $A = 1$, $D = -\frac{1}{\pi}$, $C = -\frac{1}{\pi}$

$B = \frac{1}{\pi}$

$$V(w) = 1 + \frac{\arg(w+0{,}25)}{\pi} - \frac{\arg(w+0.09)}{\pi} - \frac{\arg(w)}{\pi}$$

Lösningen $u(z)$ hittas som

$$u(z) = V(f(z)) = V\left(\left(\frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{2}\right)^2\right).$$

4. vi märker att

$$f*f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\cdot\hat{f})$$

$$f*f*f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\cdot\hat{f}\cdot\hat{f})$$

osv

$$f*f*f*f*f*f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\cdot\hat{f}\cdot\hat{f}\cdot\hat{f}\cdot\hat{f}\cdot\hat{f})$$

nu kan vi se att

$$\hat{f}^3 = \hat{f}^5 = \hat{f}, \quad \hat{f}^2 = \hat{f}^4 = \hat{f}^6$$

$$= \begin{cases} 1, & 2 \le \xi < 2^7 \\ 0 & \text{andra } \xi \end{cases}$$

Därför $f*f*f = f*f*f*f*f = f$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_2^4 e^{ix\xi}d\xi + \int_8^{16} e^{ix\xi}d\xi + \int_{32}^{64} e^{ix\xi}d\xi\right.$$

$$\left.- \int_4^8 e^{ix\xi}d\xi - \int_{16}^{32} e^{ix\xi}d\xi - \int_{64}^{128} e^{ix\xi}d\xi\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{-e^{2ix} + 2e^{4ix} - 2e^{8ix} + 2e^{16ix} - 2e^{32ix} + 2e^{64ix} - e^{128ix}\right\}$$

$$f*f = f*f*f*f = f*f*f*f*f*f$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int^{128} e^{ix\xi}d\xi = \frac{1}{2\pi}\left(e^{i128x} - e^{2ix}\right).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f*g|^2 dx \overset{\text{Plancherel}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f*g}|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}\cdot\hat{g}|^2 d\xi$$

$$= \quad \hat{g}(\xi) = \frac{1}{2}, \ \xi \in (-5,5) \ ; \ \hat{g}(\xi) = 0, \ |\xi| > 5$$

$$\hat{f}^2(\xi)\hat{g}(\xi)^2 = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 2 < \xi < 5 \\ 0, & \xi \text{ utanför } (2,5) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}\hat{g}|^2 = \frac{1}{4}\cdot 3 = \frac{3}{4}.$$

5. Vi har ohomogena randvillkoren, så ett förberedelsesteg krävs: vi söker $v(x,t)$ som satisfierar randvillkoren. Vi tar $v(x,t)$ som en linjär funktion $v(x,t) = ax$

a hittas ur $2a + a\pi = 2+\pi$, $a = 1$.

Tar $u = v + w$. funktionen w satisfierar

$w_{tt} = w_{xx} + w_x + 1$ med randvillkoren

$w(0,t) = 0$, $w_x(\pi,t) + w(\pi,t) = 0$ och begynnelsevillk.

$w(x,0) = u(x,0) - v(x) = (1-a)x = 0$, $w_t(x,0) = \sin x$.

Separerar variabler; söker enkla lösningar

$w(x,t) = X(x)\,T(t)$

$$\frac{X'' + X'}{X} = \frac{T''}{T} = -\mu^2$$

$X'' + X' + \mu^2 X = 0$. Den ekvationen har dålig form - ej Sturm-Liouvill. Vi skriver den som

$$e^{-x}\left(e^{x} X'(x)\right)' + \mu^2 X(x) = 0$$

$$\left(e^{x} X'(x)\right)' + e^{x}\mu^2 X(x) = 0,$$

med vikten e^{x}.

Det är ett S-L problem

Vi löser ekvationen: karakt. ekvationen blir $k^2 + k + \mu^2 = 0$, $k = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}}$

Lösningar $X(x) = A e^{-\frac{x}{2}} \sin\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}}\,x + B e^{-\frac{x}{2}} \cos\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}}\,x$

$x = 0$: $B = 0$; $x = \pi$:

$$X'(x) = A\left[-\frac{1}{2}\sin\sqrt{\mu^2 - \tfrac{1}{4}}\,x + \sqrt{\mu^2 - \tfrac{1}{4}}\cos\sqrt{\mu^2 - \tfrac{1}{4}}\,x\right] e^{-\frac{x}{2}}$$

$$2X'(x) + X(x) = A\sqrt{\mu^2 - \tfrac{1}{4}}\cos\left(\sqrt{\mu^2 - \tfrac{1}{4}}\,x\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$2X'(\pi) + X(\pi) = A\sqrt{\mu^2 - \tfrac{1}{4}}\cos\sqrt{\mu^2 - \tfrac{1}{4}}\,\pi\, e^{-\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\sqrt{\mu^2 - \tfrac{1}{4}} = n + \tfrac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad \mu_n^2 = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4}.$$

Egenfunktioner är

$X_n(x) = A_n e^{-\frac{x}{2}} \sin nx$. Normeringkoefficienter:

$$A_n = \left(\int_0^{\pi} \sin^2 nx \; e^{-x} e^{-x} dx \right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \; e^{-\frac{x}{2}}, \quad \mu_n^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}, \; n = 1, 2, \ldots$$

Söker lösningen $w(x,t)$ som

$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$. Sätter in i ekvationen:

$$\sum \left(T'' + \mu_n^2 T_n \right) X_n = 1.$$

multiplicerar med X_k, med vikten e^x och integrerar

$$T_k'' + T_k \mu_k^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} e^x e^{-x} \sin kx \, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k}{\frac{1}{4} + k^2} \left(1 - e^{\frac{\pi}{2}} \cos k\pi \right) = a_k.$$

$T_k'' + T_k \mu_k^2 = a_k$. Lösning: $T_k(t) = \frac{a_k}{\mu_k^2} + b_k \sin \mu_k t + c_k \cos \mu_k t$.

För att hitta koeff. b_k, c_k, använder randvillkoren:

$T_k(0) = 0, \quad c_k = -\frac{a_k}{\mu_k^2}; \quad \sum T_k'(0) X_k(x) = \sin x,$

$$b_k \mu_k = T_k'(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin x \sin nx \; e^{-\frac{x}{2}} e^{x} dx =$$

$$b_k = \frac{1}{\mu_k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin x \sin nx \; e^{\frac{x}{2}} dx.$$

6. Fourier-serien för $f(\theta) = e^{-\theta}$ på $(-\pi, \pi)$ är (10)

$$\sum c_n e^{in\theta}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\theta} e^{-in\theta} d\theta = \frac{(-1)^n}{2\pi(in+1)} (e^{\pi} - e^{-\pi})$$

Funktionen f är styckvis kontinuerlig.

$$\theta = 0: \quad f(0) = e^0 = 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{in+1} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}$$

$$f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = e^{\mp\pi} = \sum \frac{(-1)^n}{in+1} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} e^{\pm in\frac{\pi}{2}}$$

$\theta = \pi$, $\theta = -\pi$ - funktionen är diskontinuerlig i dessa punkter, så konvergerar serien med halvsumman av ensidiga gränsvärden

$$\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \sum \frac{1}{in+1} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}$$

Integrering $F(\theta) = \int_0^{\theta} f(s)\,ds = 1 - e^{-\theta}$

$F(\theta) = c_0 \theta + \sum C_n e^{in\theta}$, c_0 är c_0-koeff. för f,

$$c_0 = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi},$$

$$C_n = \frac{1}{in} c_n = \frac{1}{in} \frac{(-1)^n}{2\pi(in+1)} (e^{\pi} - e^{-\pi})$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi - (e^{\pi} - e^{-\pi})\right).$$

Derivera kan man inte eftersom funktionen $f(\theta)$ inte är deriverbar.