Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA131 Fourieranalys för F2/Kf2** den 9/3 1999, kl. 14.15–18.15.

Hjälpmedel: Beta, Standard Math. Tables. Typgodkänd räknedosa.
Telefon: Jarl Lindrud, ankn. 5361.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. För ett linjärt, tidsinvariant system gäller att insignalen $\theta(t)e^{-2t}$ ger upphov till utsignalen $t^2\theta(t)e^{-3t}$. Vad blir utsignalen $y(t)$, om insignalen $x(t)$ är 2π-periodisk och $x(t) = t$ för $0 < t < 2\pi$? Ange $y(t)$ i form av en komplex trigonometrisk Fourierserie. (7p)

2. Lös problemet

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,\\
&u_x(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 2,\\
&u(x,0) = 2x^2.
\end{aligned}$$

(8p)

3. Lös problemet

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0,\\
&u(x,0) = xe^{-\frac{1}{2}x^2+x}.
\end{aligned}$$

(7p)

4. Bestäm den stationära temperaturfördelningen i klotet $x^2+y^2+z^2 < R^2$, då ytan $x^2+y^2+z^2 = R^2$ hålls vid temperaturen $1+z^3$. (7p)

5. Visa att Laguerrefunktionerna $\ell_n(t) = e^{-t/2}\theta(t)L_n(t)$ (där $L_n(t)$ är Laguerrepolynomen med $\alpha = 0$) har Fouriertransformerna

$$\hat{\ell}_n(\omega) = \frac{(i\omega - \frac{1}{2})^n}{(i\omega + \frac{1}{2})^{n+1}}.$$

Visa att $\{\hat{\ell}_n\}_0^\infty$ är en ortogonalbas för det underrum av $L^2(\mathbb{R})$ som består av de funktioner som är Fouriertransformer av funktioner $f \in L^2(\mathbb{R})$ med $f(t) = 0$ för $t < 0$. (7p)

6. Låt ett regulärt Sturm-Liouville-problem med separerade randvillkor vara givet. Visa att alla egenvärden är reella och att egenfunktioner hörande till olika egenvärden är ortogonala (m.a.p. den tillhörande viktfunktionen). En del av beviset kanske utgörs av en hjälpsats. Den skall i så fall också bevisas. (7p)

7. Det finns flera sätt att visa att Laplacetransformen av $J_0(t)$ är

$$\int_0^\infty J_0(t)e^{-st}\,dt = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

för $\mathrm{Re}\, s > 0$. Ett sätt är att först visa denna formel för s reellt och större än 1 genom att sätta in serieutvecklingen av $J_0(t)$ och integrera termvis. Gör detta och jämför med serieutvecklingen av $1/\sqrt{s^2+1} = \frac{1}{s}(1+\frac{1}{s^2})^{-1/2}$. Motivera varför det sedan följer att formeln gäller för alla $\mathrm{Re}\, s > 0$. (7p)

KH