Fouriertransformer

f är definierad på $\mathbb{R}$. Fourierserieutveckla f på $[-L, L]$:

$$f(x) = \frac{1}{2L}\sum_{-\infty}^{\infty} C_{n,L}\, e^{in\pi x/L}, \quad \text{där } C_{n,L} = \int_{-L}^{L} f(y)\, e^{-in\pi y/L}\, dy.$$

Sätt $\Delta\xi = \frac{\pi}{L}$, $\xi_n = n(\Delta\xi) = \frac{n\pi}{L}$, $(|x| < L)$;

Antag $f \xrightarrow{\text{snabbt}} 0$, då $x \to \pm\infty$;

$$C_{n,L} = \int_{-L}^{L} f(y)\, e^{-i\xi_n y}\, dy \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-i\xi_n y}\, dy := \hat{f}(\xi_n), \quad L \to \infty \Rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty}\Delta \int_{-\infty}^{\infty}$$

$\boxed{\text{OBS! } L_1 \not\to L_2,\ L_2 \not\to L_1}$

$$f(x) \approx \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi_n)\, e^{i\xi_n x}(\Delta\xi) \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi$$

Def. För $f \in L^1(\mathbb{R})$ sätt $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx := \mathcal{F}[f(x)](\xi) = \mathcal{F}[f(x)]$

$\hat{f}(\xi)$ begränsad, ty $|\hat{f}(\xi)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$ $(\Leftarrow f \in L^1(\mathbb{R}))$

$\hat{f}(\xi)$ kontinuerlig: Låt $\xi \to \xi_0$; visa $\hat{f}(\xi) \to \hat{f}(\xi_0)$.

Pf. Eftersom $|f(x)\, e^{-i\xi x}| = |f(x)|$ för alla ξ och $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$,

så följer av satsen om dominerad konvergens att

$$\lim_{\xi \to \xi_0} \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\xi \to \xi_0} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\xi_0 x}\, dx = \hat{f}(\xi_0).$$

Alternativ beteckning:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Om $f(t) = 0$ för $t < 0$ är $\hat{f}(\omega) = F(i\omega)$ där $F(s)$ är Laplacetransformen

Thm 7.5. Antag $f \in L^1(\mathbb{R})$

(a) (1) $\mathcal{F}[f(x-a)](\xi) = e^{-ia\xi}\hat{f}(\xi)$

(2) $\mathcal{F}[e^{iax}f(x)](\xi) = \hat{f}(\xi - a)$

(b) $\mathcal{F}[f(\delta x)](\xi) = \frac{1}{\delta}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right), \quad (\delta > 0)$

(c) (1) Antag f kont. styckvis glatt, $f' \in L^1$. Då är

$$\mathcal{F}[f'(x)](\xi) = (i\xi)\hat{f}(\xi)$$

(2) Antag $xf(x) \in L^1$. Då är

$$\mathcal{F}[xf(x)](\xi) = i\hat{f}'(\xi)$$

Bevis: (a)

(1) $\underline{\underline{\mathcal{F}[f(x-a)](\xi)}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-i\xi x}dx = \left\{\begin{matrix} x-a=y \\ dx=dy \end{matrix}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi(y+a)}dy$

$= e^{-i\xi a}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi y}dy = \underline{\underline{e^{-ia\xi}\hat{f}(\xi)}}$

(2) $\underline{\underline{\mathcal{F}[e^{iax}f(x)]}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)\cdot e^{-i\xi x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\xi-a)x}dx = \underline{\underline{\hat{f}(\xi-a)}}$

(b)

$\underline{\underline{\mathcal{F}[f(\delta x)]}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x)e^{-i\xi x}dx = \left\{\begin{matrix} \delta x = y \\ dx = \frac{1}{\delta}dy \end{matrix}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\left(\frac{\xi}{\delta}\right)y}\frac{1}{\delta}dy = \underline{\underline{\frac{1}{\delta}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)}}$

(c)

(1) $\underline{\underline{\mathcal{F}[f'(x)]}} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\xi x}dx \overset{PI}{=} \cancel{\left[f(x)e^{-i\xi x}\right]_{-\infty}^{\infty}} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\xi)e^{-i\xi x}dx$

(OBS: $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{\infty} f'(x)dx$ existerar och måste då vara 0 annars $f \notin L^1$

Analogt i $-\infty$.) $= (i\xi)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx = \underline{\underline{(i\xi)\hat{f}(\xi)}}$

(2) $\underline{\underline{\mathcal{F}[xf(x)]}} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\xi x}dx = i\frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx = \underline{\underline{i\hat{f}'(\xi)}}$

Def. Faltning $(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy$

väldefinerad under diverse villkor på f o g; se Folland sid 206

Thm 7.1. $f*(ag+bh) = a(f*g) + b(f*h)$; a, b konstanter

$f*g = g*f$

$f*(g*h) = (f*g)*h$

Thm 7.2. $(f*g)'(x) = (f'*g)(x) = (f*g')(x)$

Thm 7.5 (d) (Faltningssatsen)

$$\mathcal{F}[f*g] = (f*g)^{\wedge} = \hat{f}\,\hat{g}$$

Bevis: $(f*g)^{\wedge}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(x)\, e^{-i\xi x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, e^{-i\xi x}\, dy\, dx$

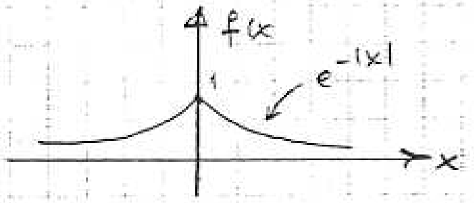
$= [\text{kasta om integrationsordning}] = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, e^{-i\xi x}\, dx \right\} dy$

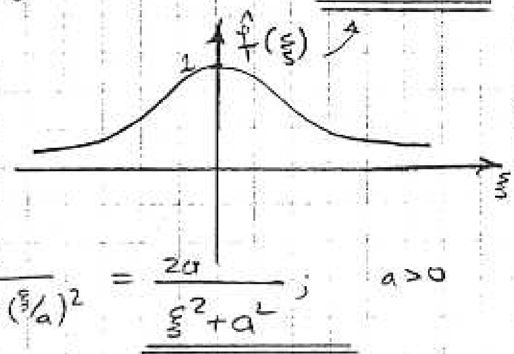
$= [x-y=z \text{ ; inre integralen}] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, e^{-i\xi y}\, e^{-i\xi z}\, dz \right\} dy$

$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{-i\xi y}\, dy \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, e^{-i\xi z}\, dz \right) = \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi)$

Exempel: $\mathcal{F}\left[e^{-|x|}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\, e^{-i\xi x}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\xi)x}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+i\xi)x}\, dx$

$= \left[\frac{e^{(1-i\xi)x}}{1-i\xi} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-(1+i\xi)x}}{-(1+i\xi)} \right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}$





Skalning: $\mathcal{F}\left[e^{-a|x|}\right] = \frac{1}{a} \frac{2}{1+(\xi/a)^2} = \frac{2a}{\xi^2+a^2}$; $a>0$

$\mathcal{F}\left[\operatorname{sign} x \cdot e^{-a|x|}\right] \overset{a>0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(x)\, e^{-a|x|}\, e^{-i\xi x}\, dx = \int_{-\infty}^{0} -e^{(a-i\xi)x}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\xi)x}\, dx$

$= -\left.\frac{e^{(a-i\xi)x}}{a-i\xi}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{-(a+i\xi)x}}{-(a+i\xi)}\right|_{0}^{\infty} = \frac{-1}{a-i\xi} + \frac{1}{a+i\xi} = \frac{-2i\xi}{a^2+\xi^2}$

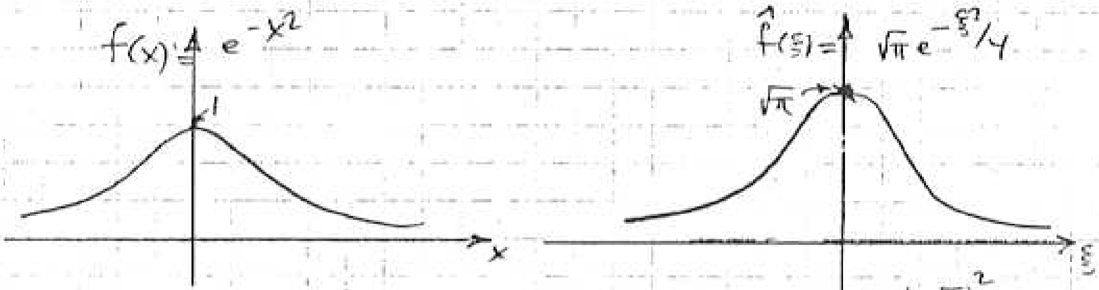
Exempel: $f(x)=e^{-x^2}$, $\hat f(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-i\xi x}\,dx$

$$\hat f'(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}(-ix)e^{-x^2}e^{-i\xi x}\,dx \overset{PI}{=} \left[\tfrac{i}{2}e^{-x^2}e^{-i\xi x}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{i}{2}e^{-x^2}(-i\xi)e^{-i\xi x}\,dx$$

$$= -\frac{\xi}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-i\xi x}\,dx$$

$\therefore\ \hat f'(\xi) = -\frac{\xi}{2}\hat f(\xi)$; som ger $\hat f(\xi)=Ce^{-\xi^2/4}$

Obs! $\hat f(0)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi} \Rightarrow C=\sqrt{\pi}$; $\therefore\ \underline{\underline{\mathcal{F}[e^{-x^2}](\xi)=\sqrt{\pi}\,e^{-\xi^2/4}}}$



Skalning: $\underline{\underline{\mathcal{F}[e^{-ax^2/2}]}}(\xi) = \left\{\delta=\sqrt{\tfrac{a}{2}}\right\} = \sqrt{\tfrac{2}{a}}\sqrt{\pi}\,e^{-\left(\xi\sqrt{\frac{2}{a}}\right)^2/4}$

$$= \underline{\underline{\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,e^{-\frac{\xi^2}{2a}}}}$$

Sats (Sid 218) Antag $\underline{f\in L^1(\mathbb{R})}$, $\underline{f \text{ begränsad}}$, $\underline{\hat f\in L^1(\mathbb{R})}$. Då är i kontinuitetspunkter för f

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat f(\xi)e^{i\xi x}\,dx \qquad \left(\sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}\right)$$

Bevis. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat f(\xi)\, e^{-\varepsilon^2\xi^2/2}e^{i\xi x}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi y}}_{\hat f(\xi)} e^{-\varepsilon^2\xi^2/2}e^{i\xi x}\,dy\,d\xi$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon^2\xi^2/2}e^{-i\xi(y-x)}\,d\xi\right\}dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\mathcal{F}\left[e^{-\varepsilon^2\xi^2/2}\right](y-x)\,dy \underset{(a=\varepsilon^2)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon}e^{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}}\,dy$$

$$= \left\{\frac{y-x}{\sqrt{2}\,\varepsilon}=z\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\sqrt{2}\,\varepsilon z)\cdot\frac{1}{\cancel{\varepsilon}}e^{-z^2}\cancel{\varepsilon}\sqrt{2}\,dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\sqrt{2}\,\varepsilon z)\,e^{-z^2}\,dz = \left\{\begin{array}{l} \left|\hat f(\xi)e^{-\varepsilon^2\xi^2/2}e^{i\xi x}\right| \le |\hat f(\xi)|\in L^1 \\ \left|f(x+\sqrt{2}\,\varepsilon z)\,e^{-z^2}\right| \le Me^{-z^2}\in L^1 \quad (|f| \text{ begr. av } M)\end{array}\right\}$$

Satsen om dominerad konvergens ger då

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat f(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-z^2}\,dz = f(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,dz = f(x).$$

kontinuitetspkt.

∎

Sats (sid 220) Antag $f \in L^1$, f styckvis glatt, då är

$$\frac{1}{2}\left[f(x_-)+f(x_+)\right] = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi$$

Bevis (Se Folland)

Sats (sid 221) Antag $f, \hat{f}, g, \hat{g}$ tillhör L^1. Då är

$$2\pi\langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$$

dvs

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi$$

Bevis Enligt inversionssatsen är $g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$

$$2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\xi)}\, e^{-i\xi x} d\xi = \{f, \hat{g} \in L^1\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\xi)} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx\right\} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi . \quad \square$$

Anm. Definitionen av Fouriertransform kan utvecklas till godtyckliga L^2-funktioner. Det gäller att $\hat{f} \in L^2$

Plancherels sats:

$$2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi, \quad \text{för } g, \hat{g} \in L^2.$$

OBS! $g = f \Rightarrow 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$ i.e,

Parsevals formel:

$$2\pi \|f\|_{L^2}^2 = \|\hat{f}\|_{L^2}^2 .$$

Anm. Inversionssatsen kan formuleras som en symmetriregel:

$$\boxed{\varphi = \hat{f} \Rightarrow \hat{\varphi}(-\xi) = 2\pi f(\xi) \text{ eller } \hat{\varphi}(\xi) = 2\pi f(-\xi)}$$

Bevis: $\varphi(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \xrightarrow{\text{inv}} f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \{x \to -t\}$

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi t} d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\xi t} d\xi = \frac{1}{2\pi}\hat{\varphi}(t).$$

$$\therefore \hat{\varphi}(x) = 2\pi f(-x).$$

Anm. Alla formler och räkneregler – inklusive symmetriregeln gäller också i L^2-fallet.

Tillämpningar av symmetri:

Exempel. $\chi_a(x) = \theta(x+a) - \theta(x-a) = \begin{cases} 1 & |x|<a \\ 0 & |x|>a \end{cases}$

har Fouriertransformen $2\dfrac{\sin a\xi}{\xi}$, ty

$$\hat{\chi}_a(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_a(x) e^{-i\xi x}\,dx = \int_{-a}^{a} e^{-i\xi x}\,dx = \left[\frac{1}{-i\xi} e^{-i\xi x}\right]_{x=-a}^{x=a}$$

$$= \frac{1}{i\xi}\left(e^{i\xi a} - e^{-i\xi a}\right) = \frac{2\sin(a\xi)}{\xi}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{2\sin(ax)}{x}\right](\xi) = 2\pi\chi_a(-\xi), \quad \mathcal{F}\left[\frac{\sin(ax)}{x}\right] = \pi\chi_a(\xi)$$

$\chi_a(-\xi) = \chi_a(\xi)$

(OBS! Lös Extra övning 26)

Exempel: Vi vet att $\mathcal{F}[e^{-|x|}] = \dfrac{2}{1+\xi^2}$ $\wedge$ $\mathcal{F}[e^{-a|x|}] = \dfrac{2a}{\xi^2+a^2}$

Symmetri $\Rightarrow \mathcal{F}\left[\dfrac{2}{1+x^2}\right] = 2\pi e^{-|-\xi|} = 2\pi e^{-|\xi|} \Rightarrow \dfrac{1}{1+x^2} \overset{\mathcal{F}}{\supset} \pi e^{-|\xi|}$

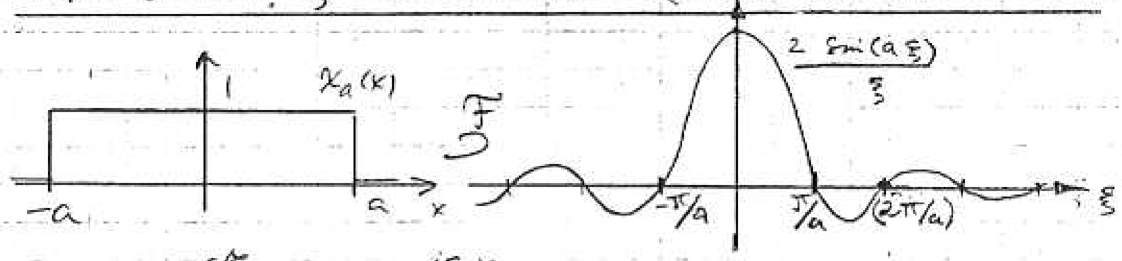
$$\mathcal{F}\left[\frac{2a}{x^2+a^2}\right] = 2\pi e^{-a|\xi|} \Rightarrow \frac{1}{x^2+a^2} \overset{\mathcal{F}}{\supset} \left(\frac{\pi}{a}\right) e^{-a|\xi|}$$

Exempel: Symmetri $\Rightarrow$

$$\mathcal{F}\left[e^{-ax^2/2}\right] = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\, e^{-\xi^2/2a} \Rightarrow \mathcal{F}\left[\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\, e^{-x^2/2a}\right] = 2\pi e^{-a(-\xi)^2/2}$$

Symmetri idén: $f(x) \overset{\mathcal{F}}{\supset} \hat{f}(\xi) = g(\xi) \Rightarrow g(x) \overset{\mathcal{F}}{\supset} 2\pi f(-\xi)$

Byt ξ mot x, x mot $(-\xi)$ & mult. med 2π.



$$\chi_a(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(a\xi)}{\xi} e^{i\xi x}\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\xi}{\xi} e^{i\xi x}\,d\xi$$

Låt $a=1$, $x=0$ fås; $1 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi = \pi$

Fourier inversionssats (sid 218)

Se Folland!

Antag $f \in L^1(\mathbb{R})$, f är kontinuerlig i x_0, och höger och vänster derivatorna $f'(x_0^+)$ och $f'(x_0^-)$ i x_0 existerar. Då är

$$f(x_0) = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{r} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x_0}\, d\xi$$

Bevis: Sätt

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)\, e^{-\frac{1}{2}(x-x_0)^2}}{x - x_0};$$

Då är

$$\lim_{x \to x_0^+} g(x) \overset{\text{L'Hôpitals}}{=} f'(x_0^+) + f(x_0)(x-x_0)\, e^{-\frac{1}{2}(x-x_0)^2}\Big|_{x=x_0} = f'(x_0^+)$$

och analogt $\lim_{x \to x_0^-} g(x) = f'(x_0^-)$.

Alltså är $g(x)$ begränsad i en omgivning av x_0, och det följer att g och xg $\left(= x_0 g + f(x) - f(x_0)\, e^{-(x-x_0)^2/2}\right)$ <u>tillhör $L^1(\mathbb{R})$</u>.

$$f(x) = f(x_0)\, e^{-(x-x_0)^2/2} + x\, g(x) - x_0\, g(x) \Rightarrow \left\{ e^{-x^2/2} \overset{\mathcal{F}}{\supset} \sqrt{2\pi}\, e^{-\xi^2/2} \right\}$$

$$\hat{f}(\xi) \overset{T2}{\underset{6}{=}} f(x_0)\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, e^{-ix_0\xi} + i\,\hat{g}'(\xi) - x_0\,\hat{g}(\xi).$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x_0}\, d\xi = f(x_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-r}^{r} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, d\xi + \frac{i}{2\pi}\int_{-r}^{r} \hat{g}'(\xi)\, e^{i\xi x_0}\, d\xi$$

$$- \frac{x_0}{2\pi}\int_{-r}^{r} \hat{g}(\xi)\, e^{i\xi_0 x}\, d\xi = f(x_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-r}^{r} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, d\xi + \frac{i}{2\pi}\Big[\hat{g}(\xi)\, e^{i\xi x_0}\Big]_{-r}^{r}$$

$$\cancel{- \frac{i}{2\pi}\int_{-r}^{r} \hat{g}(\xi)(ix_0)\, e^{i\xi_0 x}\, d\xi} \cancel{- \frac{x_0}{2\pi}\int_{-r}^{r} \hat{g}(\xi)\, e^{i\xi x_0}\, d\xi}$$

$$= f(x_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-r}^{r} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, d\xi + \frac{i}{2\pi}\left[\hat{g}(r)\, e^{irx_0} - \hat{g}(-r)\, e^{-irx_0}\right]$$

$$\longrightarrow f(x_0), \quad \text{då } r \longrightarrow \infty,$$

Enligt <u>Riemann-Lebesgue Lemma</u>:

$$\boxed{u \in L^1 \Rightarrow \hat{u}(\xi) \longrightarrow 0, \quad \text{då } \xi \to \pm\infty.}$$

<u>Tillämpningar av F-transform; Att lösa PDE i obegränsade områden</u>

<u>Ex 1</u> $\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & t>0,\ -\infty<x<\infty & \text{(DE)} \\ u(x,0)=f(x) & & \text{(IV)} \end{cases}$

Lsg

$\hat{u}(\xi,t) = \mathcal{F}_x[u(x,t)](\xi)$

$$F[u_t] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-i\xi x}\,dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,e^{-i\xi x}\,dx = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$$

$$F[u_{xx}] = (i\xi)^2 \hat{u}.$$

$$F[DE]: \Rightarrow \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -k\xi^2 \hat{u} \Rightarrow \hat{u}(\xi,t) = Ce^{-k\xi^2 t}$$

$$F[IV]: \Rightarrow \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi), \quad \therefore \hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)e^{-k\xi^2 t}$$

Nu är $F\left[e^{-ax^2/2}\right] = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\, e^{-\xi^2/2a}$, så med $\frac{1}{2a} = kt$, $a = \frac{1}{2kt}$

är $F\left[e^{-x^2/4kt}\right] = \sqrt{4\pi kt}\, e^{-k\xi^2 t}$, varför

$$\underline{\underline{u(x,t)}} = f(x) * \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-x^2/4kt} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\,dy}}$$

<u>Ex 2</u> $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & -\infty<x<\infty,\ y>0 & \text{Poissons ekvation (DE)} \\ u(x,0)=f(x), & u \text{ begränsad} & \text{(IV)} \end{cases}$

Lsg $\hat{u}(\xi,y) = \mathcal{F}_x[u(x,y)]$, (DE), (IV) F-transformeras (i x) enl.

$$\begin{cases} -\xi^2\hat{u} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = 0 & \Rightarrow \hat{u}(\xi,y) = C_1 e^{|\xi| y} + C_2 e^{-|\xi| y} \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi), \quad \hat{u} \text{ begränsad} & \{\Rightarrow C_1 = 0\} \Rightarrow \hat{u}(\xi,0) = C_2 = \hat{f}(\xi) \end{cases}$$

$$\therefore \hat{u}(\xi,y) = \hat{f}(\xi)\, e^{-|\xi| y}$$

<u>OBS!</u> $F\left[\frac{1}{x^2+a^2}\right] \overset{(10)}{\underset{(233)}{=}} \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}$, $(a>0)$, med $a=y$ blir $F\left[\frac{y}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\right] = e^{-|\xi| y}$

$$u(x,y) = f(x) * \frac{y}{\pi}\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)\,\frac{ds}{x^2+s^2}; \quad \text{Poissons Integralformel}$$

<u>OBS!</u> $|f| \le M \Rightarrow |u(x,y)| \le M\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,ds}{y^2+s^2} = \frac{M}{\pi}\arctan\left(\frac{s}{y}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = M$ ☒

<u>Ex 3</u> (a) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x>0,\ y>0 \\ u(0,y)=0, \quad u(x,0)=\frac{x}{x^2+1}, & u \text{ begr.} \end{cases}$ ‖ Betrakta istället: (b) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in\mathbb{R},\ y>0 \\ u(x,0)=\frac{x}{x^2+1}, & u \text{ begr.} \end{cases}$

Då $\frac{x}{x^2+1}$ är udda blir också $u(x,y)$ udda i x, och $u(0,y)=0$ blir automatiskt uppfyllt.

$$\operatorname{sign} x\cdot e^{-a|x|} \overset{F}{\supset} \frac{-2i\xi}{a^2+\xi^2} \overset{\text{sym.}}{\Longrightarrow} \frac{-2ix}{a^2+x^2} \overset{F}{\supset} 2\pi\operatorname{sign}(-\xi)\,e^{-a|\xi|} \Longrightarrow$$

$$(*)\ \frac{x}{x^2+a^2} \overset{F}{\supset} -\pi i\operatorname{sign}(\xi)\,e^{-a|\xi|} \overset{a=1}{\Longrightarrow} \frac{x}{x^2+1} \supset -\pi i\operatorname{sign}(\xi)e^{-|\xi|}. \text{ Som i Ex 2;}$$

$$\hat{u}(\xi,y) = -i\pi\operatorname{sign}\xi\, e^{-|\xi|}e^{-y|\xi|} = -i\pi\operatorname{sign}(\xi)\,e^{-(1+y)|\xi|} \overset{a=1+y}{\underset{(*)}{\Longrightarrow}} \underline{\underline{u(x,y) = \frac{x}{x^2+(1+y)^2}}}.$$

F-transform och Sturm-Liouville problem på $[0,\infty)$.

Antag $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \underbrace{e^{-i\xi x}}_{\cos\xi x - i\sin\xi x} dx = \begin{cases} 2\int_0^\infty f(x)\cos(\xi x)\,dx, & f \text{ jämn} \\ -2i\int_0^\infty f(x)\sin(\xi x)\,dx, & f \text{ udda} \end{cases}$$

Med inversionsformeln fås

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \underbrace{e^{i\xi x}}_{\cos\xi x + i\sin\xi x} d\xi = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}(\xi)\cos(\xi x)\,d\xi, & f \text{ jämn} \\ \frac{i}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}(\xi)\sin(\xi x)\,d\xi, & f \text{ udda} \end{cases}$$

Lemma (half-space)

Antag $f \in L^1(0,\infty)$. Vi definierar Fourier cosinus (sinus) transform:

$F_c[f](\xi)$ $\left(F_s[f](\xi)\right)$ på $[0,\infty)$ enligt:

$$F_c[f](\xi) = \int_0^\infty f(x)\cos(\xi x)\,dx \quad \& \quad F_s[f](\xi) = \int_0^\infty f(x)\sin(\xi x)\,dx.$$

Alltså; om f_e & f_u är jämn resp. udda utvidg av f till R, så är $F_c[f]$ & $F_s[f]$ restriktioner av $\frac{1}{2}\hat{f}_e$ resp. $\frac{i}{2}\hat{f}_u$ till $[0,\infty)$.

Inversionsformeln ger

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_c[f](\xi)\cos(\xi x)\,d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_s[f](\xi)\sin(\xi x)\,d\xi.$$

Bevis: nästa blad!

Parsevals:

$$\int_0^\infty |F_c[f](\xi)|^2\,d\xi = \frac{1}{4}\int_0^\infty |\hat{f}_e(\xi)|^2\,d\xi = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_e(\xi)|^2\,d\xi$$

$$= 2\pi\cdot\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty} |f_e(x)|^2\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx$$

p.s.s. för $F_s[f]$.

$\Rightarrow F_c$ & $F_s : L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty)$ satisfierar

$$\|F_c[f]\|^2 = \|F_s[f]\|^2 = \frac{\pi}{2}\|f\|^2. \quad \boxtimes$$

Tillämpning av sinus och cosinus transformer

Ex 3 (cf sid. FT-8) m.h.a. sinustransform:

$$\begin{aligned}&(DE)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x>0,\ y>0\\ u(0,y)=0, \quad u(x,0)=\frac{x}{x^2+1}, & u \text{ begr.}\end{cases}\\ &(RV)\end{aligned}$$

(OBS: $u(x,0)$ är udda).

Lösning: Ansätt

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} v(\xi,y)\sin(\xi x)\,d\xi \quad \text{där}$$

$$v(\xi,y)=\mathcal{F}_s[u(\cdot,y)](\xi)=\int_0^{\infty} u(x,y)\sin(\xi x)\,dx$$

$$(DE):\quad u_{xx}+u_{yy}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[v(\xi,y)(-\xi^2)\sin(\xi x)\,d\xi+v_{yy}(\xi,y)\sin(\xi x)\right]d\xi$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(v_{yy}-\xi^2 v\right)\sin(\xi x)\,d\xi=0 \Rightarrow$$

$$v_{yy}-\xi^2 v=0,\qquad v(\xi,y)=C_1(\xi)e^{|\xi|y}+C_2(\xi)e^{-|\xi|y}$$

$$v \text{ begr.} \Rightarrow C_1=0,\quad v(\xi,0)=C_2(\xi)=\mathcal{F}_s\left[\frac{x}{x^2+1}\right](\xi)$$

Vi har att $\hat{f}_s=\frac{1}{2}i\hat{f} \Rightarrow \underline{\mathcal{F}_s\left[\frac{x}{x^2+1}\right](\xi)=\frac{i}{2}\mathcal{F}\left[\frac{x}{x^2+1}\right](\xi)}$

$$\underline{\mathcal{F}_s\left[\frac{x}{x^2+a^2}\right](\xi)}=\frac{i}{2}\mathcal{F}\left[\frac{x}{x^2+a^2}\right](\xi)=\frac{i}{2}(-i\pi)\,\mathrm{sign}(\xi)e^{-a|\xi|}=\underline{\frac{\pi}{2}\mathrm{sign}(\xi)e^{-a|\xi|}}$$

$$\Rightarrow\{a=1\}\Rightarrow C_2(\xi)=\frac{\pi}{2}\mathrm{sign}(\xi)e^{-|\xi|},\quad \text{varför}$$

$$v(\xi,y)=\frac{\pi}{2}\mathrm{sign}\,\xi\, e^{-|\xi|}e^{-|\xi|y}=\frac{\pi}{2}\mathrm{sign}(\xi)e^{-(1+y)|\xi|}=\mathcal{F}_s[u(x,y)]$$

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+(1+y)^2}$$

Detta är restriktionen på $[0,\infty)$ av den udda utvidgningen av $u(x,y)$ på $\mathbb{R}\times\{y>0\}$.

Bevis av (half-space) Lemma: $\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx$, $\left(e^{i\xi x}=\cos\xi x+i\sin\xi x\right)$

$$\Rightarrow \hat{f}_e(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f_e(x)\cos(\xi x)\,dx=2\int_0^{\infty} f_e(x)\Big|_{\mathbb{R}^+}\cos(\xi x)\,dx=2\int_0^{\infty} f(x)\cos(\xi x)\,dx$$

$$=2\,\mathcal{F}_c[f](\xi),\quad \text{dvs}\quad \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\hat{f}_e(\xi)=\mathcal{F}_c[f](\xi)}}\quad (\mathrm{I})$$

$$\hat{f}_u(\xi)=-i\int_{-\infty}^{\infty} f_u(x)\sin(\xi x)\,dx=-2i\int_0^{\infty} f_u(x)\sin(\xi x)\,dx=-2i\int_0^{\infty} f(x)\sin(\xi x)\,dx$$

$$=-2i\,\mathcal{F}_s[f](\xi),\quad \text{dvs}\quad \underline{\underline{\tfrac{i}{2}\hat{f}_u(\xi)=\mathcal{F}_s[f](\xi)}}.$$

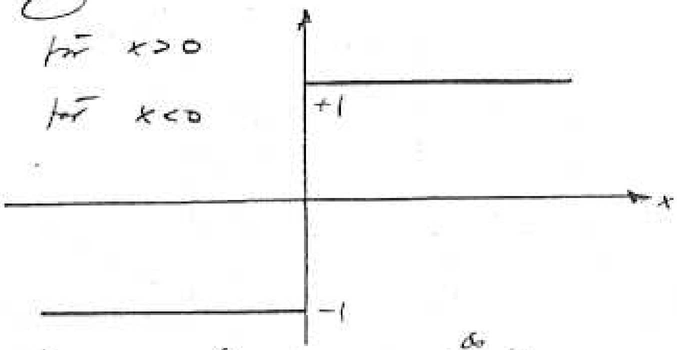
Inversion:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_e(\xi)e^{i\xi x}\overset{!!}{=}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\hat{f}_e(\xi)\cos(\xi x)\,dx\overset{(\mathrm{I})}{=}\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathcal{F}_c[f](\xi)\cos(\xi x)\,d\xi.$$

... E

F-transform of generalized functions (Some examples)

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{för } x>0 \\ -1 & \text{för } x<0 \end{cases}$$



Formellt är ju

$$\operatorname{sign}(x) \overset{F}{\supset} \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx = \int_{-\infty}^{0} -e^{-i\xi x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{i\xi x} dx$$

$$= \frac{1}{i\xi} e^{-i\xi x}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{i\xi} e^{i\xi x}\Big|_{0}^{\infty} \quad (\text{problem då } x \to \pm\infty)$$

Detta beror på att $\operatorname{sign}(x) \notin L^1$, ty $\int_{-\infty}^{\infty} |\operatorname{sign} x|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1\, dx = \infty$.

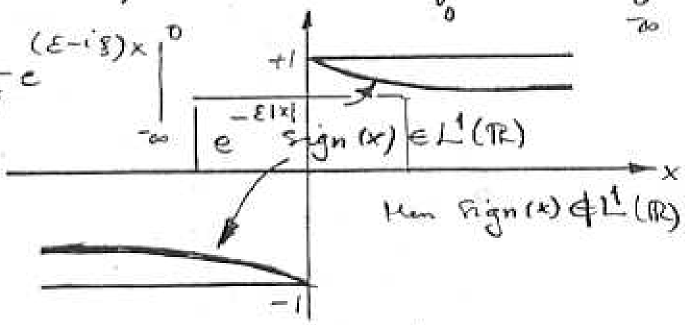
"Remedy": Multiplicera $\operatorname{sign}(x)$ med konvergensfaktorn $e^{-\varepsilon|x|}$, $\varepsilon>0$:

$$e^{-\varepsilon|x|} \operatorname{sign}(x) \overset{F}{\supset} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|x|} \operatorname{sign}(x)\, e^{-i\xi x} dx = \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon x} e^{-i\xi x} dx - \int_{-\infty}^{0} e^{\varepsilon x} e^{-i\xi x} dx$$

$$= \frac{-1}{\varepsilon+i\xi} e^{-(\varepsilon+i\xi)x}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{\varepsilon-i\xi} e^{(\varepsilon-i\xi)x}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon+i\xi} - \frac{1}{\varepsilon-i\xi}$$

$$= \frac{-2i\xi}{\varepsilon^2+\xi^2}$$



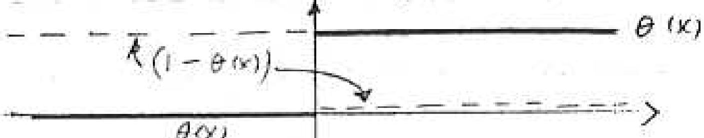
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\operatorname{sign}(x)}} \overset{F}{\supset} \frac{-2i\xi}{\xi^2} = \underline{\underline{\frac{2}{i\xi}}}. \qquad (\varepsilon \to 0)$$

OBS! Symmetri $\Rightarrow$ $\dfrac{-2ix}{\varepsilon^2+x^2} \overset{F}{\supset} 2\pi e^{-\varepsilon|-\xi|} \operatorname{sign}(-\xi) = -2\pi e^{-\varepsilon|\xi|} \operatorname{sign}(\xi)$

$-\frac{1}{4}$ $(\varepsilon = a)$

$$\underline{\underline{+\frac{i}{2} \quad \frac{x}{a^2+x^2} \overset{F}{\supset} +\frac{\pi}{2} e^{-a|\xi|} \operatorname{sign}(\xi).}} \qquad \boxed{\frac{x}{x^2+a^2} \overset{F}{\supset} (-\pi i) e^{-a|\xi|} \operatorname{sign}(\xi)}$$

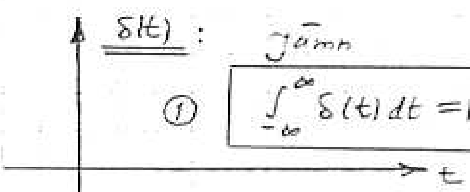
Alt. Enligt Fig. $\operatorname{sign}(x) = \theta(x) + (-1)\big(1-\theta(x)\big) = 2\theta(x) - 1$



$\underline{\text{Kom ihåg}}$ $\underline{1 \overset{F}{\supset} 2\pi\,\delta(\xi)}$; $\underline{\theta(x) \overset{F}{\supset} \pi\delta(\xi) + \frac{1}{i\xi}}$

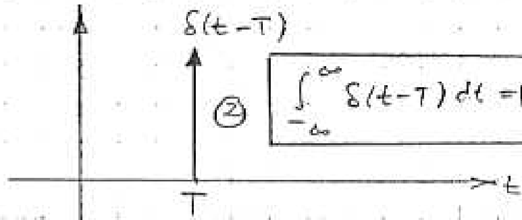
Varför $\operatorname{sign}(x) \supset 2\pi\delta(\xi) + \frac{2}{i\xi} - 2\pi\delta(\xi) = \frac{2}{i\xi}$ ☐.

Fourier transform av impulsfunktioner



jämn

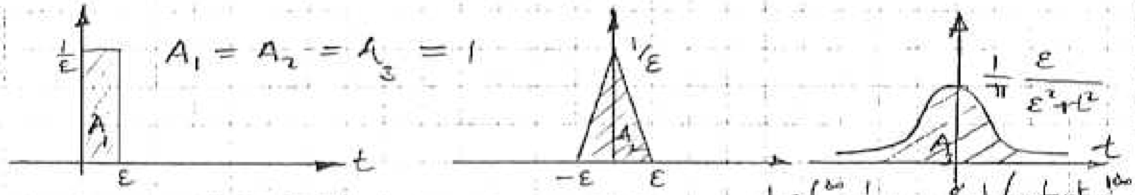
① $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1}$



② $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-T)\,dt=1}$

evalueringen: ③ $\boxed{f(t)\,\delta(t-T)=f(T)\,\delta(t-T)}$

$A_1 = A_2 = A_3 = 1$



$\frac{1}{\pi}\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^2+t^2}=\frac{\varepsilon}{\pi}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\left[\arctan\frac{t}{\varepsilon}\right]_{-\infty}^{\infty}=1.$

$\underline{\underline{\delta(t-T)\overset{F}{\supset}e^{-j\omega T}}}$, ty

$$\delta(t-T)\overset{F}{\supset}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-T)e^{-j\omega t}\,dt \overset{③}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-T)e^{-j\omega T}\,dt = e^{-j\omega T}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-T)\,dt \overset{②}{=} e^{-j\omega T}$$

$$\left.\begin{aligned}&T=0 \Rightarrow \underline{\delta(t)\overset{F}{\supset}1}\\ &\text{Symmetri} \Rightarrow 1\overset{F}{\supset}2\pi\,\delta(-\omega)\overset{①}{=}2\pi\,\delta(\omega)\end{aligned}\right]$$

OBS! $1 \notin L^1$

Allt är formellt här!!

<u>Anm</u> $f(t)=\delta(t-T)\overset{F}{\supset}\hat{f}(\omega)=e^{-j\omega T}$ (frekvensfunktion)

tidsimpuls

Impulsenergi, som ligger i frekvensbandet $[\omega,\ \omega+d\omega]$ är:

$$|\hat{f}(\omega)|^2\frac{d\omega}{2\pi}=|e^{-j\omega T}|^2\frac{d\omega}{2\pi}=d\nu.$$

Alltså energin är likformigt fördelad över hela frekvensbandet $-\infty<\omega<\infty$

$\Rightarrow$ Totala energin är ∞.

$\Rightarrow$ Exakt impuls $\delta(t-T)$ inte är fysikaliskt realiserbar, och

$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\hat{\delta}(\omega)}_{=1}e^{j\omega t}\,d\omega$ är divergent.

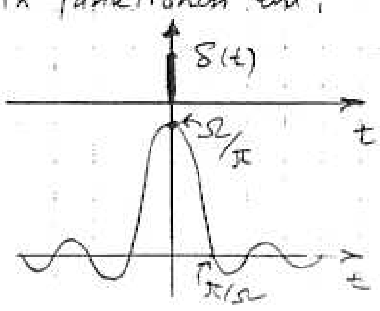
Men om vi bortser från frekvenser utanför bandet $|\omega|<\Omega$, (Ω stort)

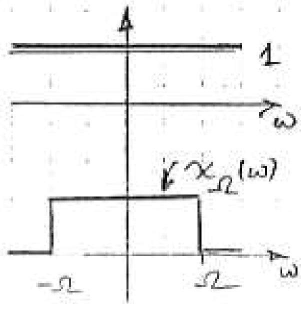
då approximerar vi deltafunktionen enl.:

$$\delta(t)\simeq\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\right]_{-\Omega}^{\Omega}=\frac{1}{\pi t}\sin\Omega t$$

$$\therefore\ \delta(t)=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{\sin\Omega t}{\pi t}$$





Dynamiska system:

Def. Ett linjärt system $\mathcal{S}$ är en linjär avbildning från ett linjärt rum av insignaler till ett linjärt rum av utsignaler:

1) $\mathcal{S}[c_1 x_1 + c_2 x_2] = c_1 \mathcal{S}[x_1] + c_2 \mathcal{S}[x_2]$.

Vi antar också att

2) $\mathcal{S}[\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathcal{S}[x_n]$

3) $\mathcal{S}[\int_a^b x(\alpha,t)\,d\alpha] = \int_a^b \mathcal{S}[x(\alpha,t)]\,d\alpha$.

Låt $y(t) = \mathcal{S}[x(t)]$. Det linjära systemet $\mathcal{S}$ är tidsinvariant om

4) $\mathcal{S}[x(t-T)] = y(t-T), \quad \forall T \in \mathbb{R}$.

Def. Systemets impulssvar är utsignalen svarande mot insignalen $\delta(t)$.

Sats: Om $\mathcal{S}$ är linjärt och tidsinvariant och h impulssvaret till $\mathcal{S}$. Då gäller att

(a) $\mathcal{S}[x(t)] = (x * h)(t)$

(b) $\mathcal{S}[e^{i\omega t}] = \hat{h}(\omega) e^{i\omega t}$; för varje $\omega \in \mathbb{R}$.

(c) om $h(t)$ är reell, gäller för $\omega > 0$ att
$\mathcal{S}[\cos \omega t] = \mathrm{Re}[\hat{h}(\omega) e^{i\omega t}]$

OBS! Varje funktion f kan skrivas som en faltning med δ funktionen

Bevis: (a) $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau \overset{\mathcal{S}}{\underset{1),3)}{\curvearrowright}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathcal{S}[\delta(t-\tau)]\,d\tau$

$\overset{(4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\,d\tau = (x*h)(t)$

(b) Sätt $x(t) = e^{i\omega t}$

$\mathcal{S}[x(t)] \overset{(a)}{=} (h*x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{i\omega(t-\tau)}\,d\tau = e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau = e^{i\omega t}\hat{h}(\omega)$

(c) Sätt $x(t) = \cos \omega t$

$\mathcal{S}[x(t)] \overset{(a)}{=} (h*x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{i\omega(t-\tau)}\,d\tau = \mathrm{Re}[\hat{h}(\omega)e^{i\omega t}]$

Def. Det linjära systemet kallas kausalt om utsignalvärde vid tiden t bara beror på insignalvärde vid tiden $\leq t$.

Sats: Antag att $\mathcal{S}$ är linjärt & tidsinvariant. Då $\mathcal{S}$ är kausalt om och endast om $h(t) = 0$ för $t < 0$.

Def. Ett linjärt tidsinvariant system med impulssvar $h(t)$ kallas stabilt om
$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$.

Ex: ① från F2/Kfe 99-03-09

För ett linjärt tidsinvariant system gäller att insignalen $\theta(t)e^{-2t}$ ger upphov till utsignalen $t^2\theta(t)e^{-3t}$. Vad blir utsignalen $y(t)$, om insignalen $x(t)$ är 2π-periodisk och $x(t)=t$ för $0<t<2\pi$? Ange $y(t)$ i form av en komplex trigonometrisk Fourierserie.

$x_1(t) \overset{A}{\curvearrowright} y_1(t)$:

$y_1(t) = (x_1 * h)(t) \Rightarrow$

$y_1(t) \overset{\mathcal{F}}{\supset} \hat{x}_1 \hat{h} \Rightarrow$

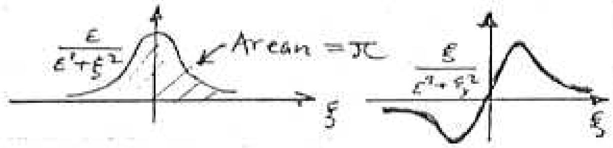
$$\boxed{\hat{h}(\xi) = \frac{\hat{y}_1(\xi)}{\hat{x}_1(\xi)}}$$

Lösning: $\theta(t)$ (som sign(t)) $\notin L^1$.

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

(I) $e^{-\varepsilon t}\theta(t) \overset{\mathcal{F}}{\supset} \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} e^{-i\xi t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(\varepsilon+i\xi)t}\,dt = \left[\frac{-e^{-(\varepsilon+i\xi)t}}{\varepsilon+i\xi}\right]_0^\infty = \frac{1}{\varepsilon+i\xi}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon+i\xi} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon-i\xi}{\varepsilon^2+\xi^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\xi^2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\xi}{i(\varepsilon^2+\xi^2)} = \pi\delta(\xi) + \frac{1}{i\xi}$$



Låt $\varepsilon = 2$ i (I) fås

$$x_1(t) = \theta(t)e^{-2t} \overset{\mathcal{F}}{\supset} \frac{1}{2+i\xi} = \hat{x}_1(\xi)$$

$$y_1(t) = t^2\theta(t)e^{-3t} \overset{\mathcal{F}}{\supset} -\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{3+i\xi}\right) = \frac{2}{(3+i\xi)^3} = \hat{y}_1(\xi)$$

$\mathcal{F}$-transformen av impulssvaret, $h(t)$: $\hat{h}(\xi) = \frac{\hat{y}_1(\xi)}{\hat{x}_1(\xi)} = \frac{2(2+i\xi)}{(3+i\xi)^3}$

Komplex $\mathcal{F}$-transform för $x(t) = t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}$, $\Omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ (T = perioden $= 2\pi$), och $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t e^{-int}\,dt = \{n \neq 0\} = \frac{1}{2\pi}\left[\left[\frac{te^{-int}}{-in}\right]_0^{2\pi} - \underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{1}{-in}e^{-int}}_{0}\right] = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi e^{-i2\pi n}}{-in} = -\frac{1}{in} = \frac{i}{n}$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

$$e^{i\xi t} \curvearrowright \hat{h}(\xi)e^{i\xi t} \quad (\text{med } \xi = n) \Rightarrow$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \curvearrowright \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \hat{h}(n) e^{int} = y(t)$$

Alltså $y(t) = c_0\hat{h}(0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} c_n \hat{h}(n)e^{int} = \frac{4}{27}\pi + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{i}{n}\frac{2(2+in)}{(3+in)^3}e^{int}$.

Samplingsteoremet (L_2-version)

Antag $f \in L^2$, $\hat{f}(\omega) = 0$ för $|\omega| \geq \Omega$, (bandbegränsad signal).
Då kan f återvinnas ur den samplade signalen som består av f:s värden i punkter $t_n = \frac{n\pi}{\Omega}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Dvs

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega t - n\pi)}{\Omega t - n\pi}.$$

Bevis: Vi Fourier serie utvecklar $\hat{f}$ i $[-\Omega, \Omega]$ enligt:

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{in\pi\omega/\Omega} = \{\text{Jämn i } n\} = \sum_{-\infty}^{\infty} C_{-n} e^{-in\pi\omega/\Omega}, \quad (|\omega| \leq \Omega).$$

där

$$C_{-n} = \frac{1}{2\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) e^{+in\pi\omega/\Omega} d\omega = \{\hat{f}(\omega) = 0,\ |\omega| \geq \Omega\} = \frac{1}{2\Omega}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{in\pi\omega/\Omega} d\omega$$

$$= \frac{\pi}{\Omega} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$$

Fourier inversionformula ger att

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} \underbrace{\sum_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\pi}{\Omega} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)}_{C_{-n}} e^{-in\pi\omega/\Omega}}_{\hat{f}(\omega)} e^{i\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\Omega} \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-i(n\pi - \Omega t)\frac{\omega}{\Omega}} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\Omega} \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \left[\frac{e^{-i(n\pi - \Omega t)\omega/\Omega}}{-i(n\pi - \Omega t)/\Omega}\right]_{\omega=-\Omega}^{\Omega}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \frac{e^{-i(n\pi - \Omega t)} - e^{i(n\pi - \Omega t)}}{-2i(n\pi - \Omega t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(n\pi - \Omega t)}{(n\pi - \Omega t)}$$

$\Rightarrow$ ∎

Samplingsteoremet (LP_α - filtreringsversion)

Antag $f(t)$ är kontinuerlig med F-transformen $\hat{f}(\omega) = 0$ för $|\omega| \geq \alpha$ (bandbegränsad signal). Om signalen samplas med frekvensen $\frac{1}{T} \geq \frac{\alpha}{\pi}$ (Vinkelfrekvens $\Omega = \frac{2\pi}{T} \geq 2\alpha$), så kan $f(t)$ återvinnas ur den samplade signalen genom en lågpassfiltrering med avhuggningsvinkelfrekvens α (LP_α-filtrering) och multiplikation med T.

Bevis: För tidsdiskreta signalen $\{f(nT)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, är den samplade signalen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\,\delta(t-nT) = f(t)\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = \underline{f(t)\,S_T(t)}$$ (OBS! tidskontinuerlig form)

F-serie utveckla $S_T(t)$; $S_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}$, med

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, e^{-in\Omega t}\, dt = \frac{1}{T}.$$

Samplade signalen blir då

$$\underline{f(t)\,S_T(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{in\Omega t} f(t) \overset{F}{\supset} \underline{\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - n\Omega)}.$$

LP_α-filtrering innebär faltning med $h_\alpha(t) = \frac{\sin \alpha t}{\pi t}$, dvs på transformsidan multiplikation med $\hat{h}_\alpha(\omega)$:

$$\hat{h}_\alpha(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{då } |\omega| \leq \alpha. \\ 0 & \text{då } |\omega| > \alpha. \end{cases}$$

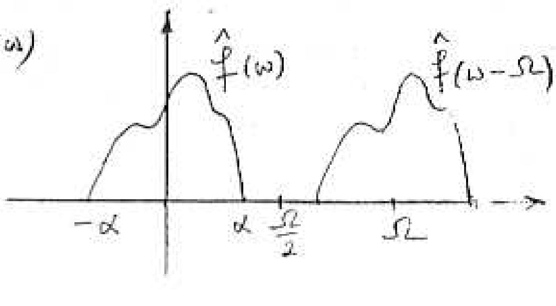
Dvs

$$LP_\alpha\big(f(t)\,S_T(t)\big) \overset{F}{\supset} \frac{1}{T}\hat{h}_\alpha(\omega)\cdot\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega - n\Omega).$$

Av termerna i summan är det bara den för $n=0$ som är $\neq 0$ i frekvensbandet $|\omega| \leq \alpha$

$$\Rightarrow \hat{h}_\alpha(\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega - n\Omega) = \hat{f}(\omega)$$

$$\Rightarrow \underline{T\,LP_\alpha\big(f(t)\,S_T(t)\big) = f(t)}$$



Samplingsövning 1 (Se Holmåker)

$$\hat{h}_\alpha(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{då } |\omega| \le \alpha \\ 0, & \text{då } |\omega| > \alpha \end{cases} \Rightarrow \hat{h}_\alpha(\omega) \overset{Fg}{\subset} \frac{1}{\pi t}\sin(\alpha t)$$

$$\hat{f}(\omega) = \hat{h}_\alpha(\omega) \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - n\Omega) \Rightarrow f(t) = h_\alpha(t) * T f(t)\,\delta_T(t)$$

$$\text{dvs } \underline{\underline{f(t)}} = T\,\frac{\sin(\alpha t)}{\pi t} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\,\delta(t-nT) \quad (\text{faltning m.a.p. } t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\,\frac{T\sin\alpha(t-nT)}{\pi(t-nT)} * \delta(t) = \underline{\underline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\,\frac{T\sin\alpha(t-nT)}{\pi(t-nT)}}}$$

(se Folland sid. 210)

Samplingsövning 2
1995-04-22
5

T-samplade signalen:

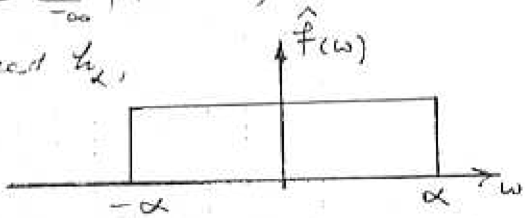
$$f_s(t) = T\sum_{-\infty}^{\infty} f(nT)\,\delta(t-nT) = T f(t) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

$$T f(t)\,\delta_T(t) \overset{F}{\supset} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - n\Omega)$$

Lågpassfiltrering innebär faltning med h_α,

där $\hat{h}_\alpha(\omega) = \theta(\omega+\alpha) - \theta(\omega-\alpha)$

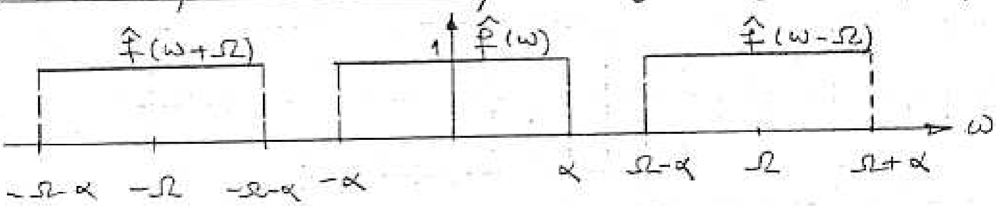
(som råkar sammanfalla med $\hat{f}(\omega)$)



Alltså är $g(t) = h_\alpha(t) * f_s(t)$, dvs $\hat{g}(\omega) = \hat{h}_\alpha(\omega) \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - n\Omega)$.

(jfr med beviset för samplingsthm.)

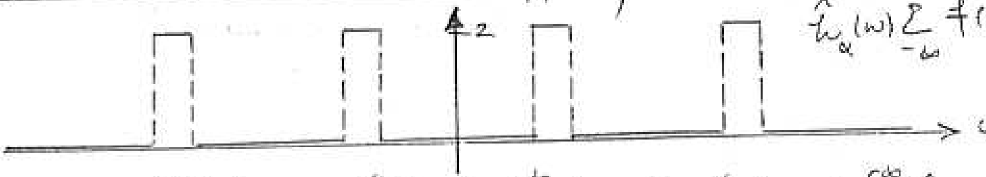
<u>Om $\Omega \ge 2\alpha$ ger endast $n=0$ något bidrag:</u> $(\Rightarrow \Omega - \alpha \ge \alpha)$



Då (eftersom $\hat{h}(\omega) = 1$ för $|\omega| \le \alpha$) blir $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)$ dvs $g(t) = f(t)$

vilket vi kunde säga direkt m.h.a. samplingsteoremet.

<u>Om $\alpha < \Omega \le 2\alpha$ sker överlappning</u>

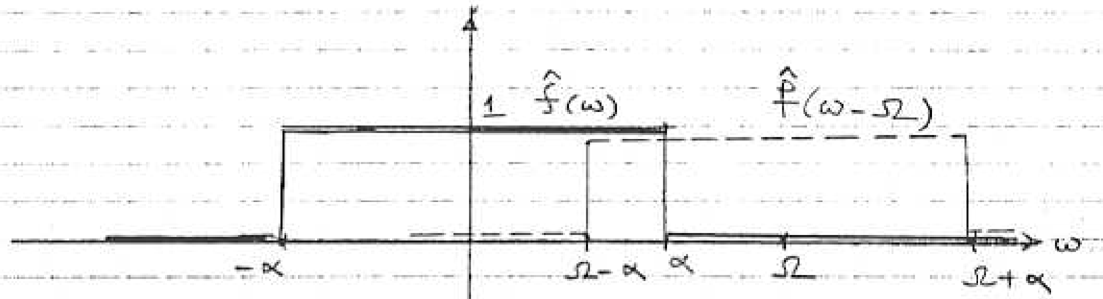


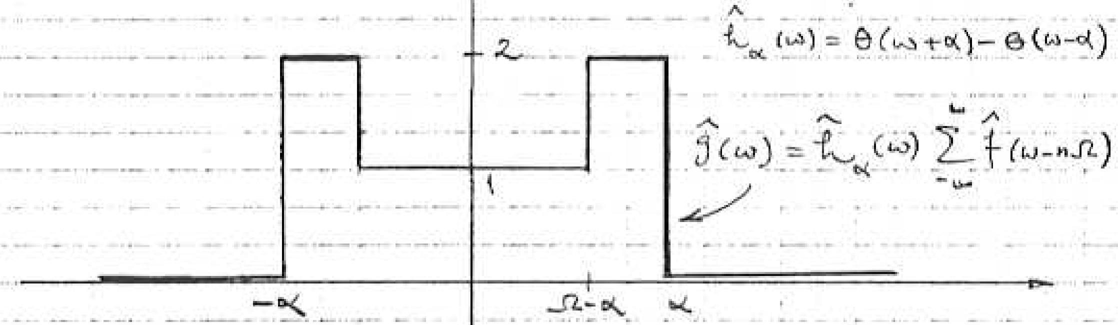
Felet [illegible]: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega) - \hat{g}(\omega)|^2\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} |\hat{f}(\omega) - \hat{g}(\omega)|^2\,d\omega$

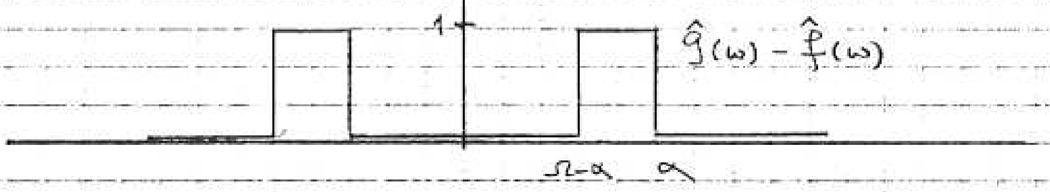
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha} |\hat{f}(\omega) - \hat{g}(\omega)|^2\,d\omega = \begin{cases} 0, & \text{om } \Omega \ge 2\alpha \\ \frac{1}{\pi}\int_{\Omega-\alpha}^{\alpha} 1\,d\omega = \frac{2\alpha - \Omega}{\pi}, & \text{om } \alpha < \Omega < 2\alpha \end{cases}$$

□

$\underline{\alpha \le \Omega \le 2\alpha} \implies 0 \le \Omega - \alpha \le \alpha$







Diskret Fourier transform

Motivering: Antag $f(x)=0$, för $x \notin [0, \Omega]$; Sampling thm $\underset{\text{Folland}}{\overset{\text{sid}}{\underset{250}{\Longrightarrow}}}$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\,dx = \int_0^{\Omega} f(x) e^{-ix\xi}\,dx \approx \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{n\Omega}{N}\right) e^{-in\frac{\Omega}{N}\xi} \cdot \frac{\Omega}{N}$$

(Riemann summa)

Summan i HL ovan är periodisk i ξ med perioden $\frac{2\pi N}{\Omega}$.

Vi beräknar $\hat{f}(\xi)$ i punkterna $\xi = \frac{2\pi m}{\Omega}$, $m = 0, 1, \dots, N-1$:

$$\hat{f}\left(\frac{2\pi m}{\Omega}\right) \cong \frac{\Omega}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i n m/N} f\left(\frac{n\Omega}{N}\right)$$

Sätt $a_n = f\left(\frac{n\Omega}{N}\right)$, då $\hat{f}\left(\frac{2\pi m}{\Omega}\right) \cong \frac{\Omega}{N} \hat{a}_m$; $|m| << N$

med $\hat{a}_m = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i mn/N} a_n$; $\hat{a} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{N-1})$

Def. En elementär operation = (1 product + 1 summa)

N primtal $\Rightarrow$ att beräkna $\hat{a}_m$ kräver N operationer. $\#(\hat{a}_m) = N$.

$\Rightarrow$ Totala antal operationer för att beräkna $\hat{a}$ är N^2.

FFT (Fast Fourier Transform);

Om N ej primtal, då $N = N_1 N_2$.

Antag $m = m' N_1 + m''$, med $0 \le m'' \le N_1 - 1$, $0 \le m' \le N_2 - 1$

$n = n' N_2 + n''$, med $0 \le n'' \le N_2 - 1$, $0 \le n' \le N_1 - 1$

Eftersom
$$e^{-2\pi i mn/N} = e^{-2\pi i \left(\frac{m'n'N_1 N_2}{N} + \frac{m'n''N_1}{N} + \frac{m''n'N_2}{N} + \frac{m''n''}{N}\right)} = e^{-2\pi i \left(\frac{m'n''}{N_2} + \frac{m''n'}{N_1} + \frac{m''n''}{N}\right)}$$

är
$$\hat{a}_m = \sum_{n''=0}^{N_2-1} C(m'', n'') e^{-2\pi i \left(\frac{m'n''}{N_2} + \frac{m''n''}{N}\right)}$$

där
$$C(m'', n'') = \sum_{n'=0}^{N_1-1} e^{-2\pi i \frac{m''n'}{N_1}} \cdot a_{\underbrace{n'N_2 + n''}_{n}}$$

Varje $C(m'', n'')$ kräver N_1 elementära operationer.

Alla $C(m'', n'')$ kräver total $\underbrace{N_1}_{\#(m'')} \underbrace{N_2}_{\#(n'')} N_1 = N N_1$ elementära operationer varje $\hat{a}_m$ kräver sedan N_2 elementära operationer $\hat{a}_m = \sum_{n''=0}^{N_2-1} \cdots$

och alla $\hat{a}_m$ kräver $\underline{N N_2}$ " " .

Alltså för att beräkna $\hat{a}$ totalt krävs det

$NN_1 + NN_2 = N(N_1 + N_2)$ elementära operationer

Antag $N_1 = N_{11} N_{12}$.

För fixt n'' är $C'(m'', n'')$ en diskret Fourier Transform i m''.

Alla $C(m'', n'')$ kan då beräknas med

$$\underbrace{N_2}_{\#(n'')} \cdot \underbrace{N_1}_{\#\left(C(m'', n'') = \sum_{n'=0}^{N_1-1} \cdots\right) = \#(m''), \text{ för fixt } n''} (N_{11} + N_{12}) = N(N_{11} + N_{12}) \text{ elementära operationer}$$

Och totalt krävs då

$$N(N_{11} + N_{12}) + \underbrace{N N_2}_{\text{alla } \hat{a}_m} = N(N_{11} + N_{12} + N_2) \text{ elementära op.}$$

Om $N = N_1 \cdots N_k$ krävs det $N(N_1 + N_2 + \cdots + N_k)$ elementära operationer.

Spec. $\underline{\text{om } N = 2^k}$, då krävs det $2kN = \underline{\underline{2N\log_2 N}}$ $\underline{\text{elementära op.}}$

<u>Definition av diskreta Fouriertransform</u>: Sätt $w = e^{2\pi i/N}$.

Låt $a = (a_0, \dots, a_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$. Den diskreta Fouriertransformen av a är $\hat{a} \in \mathbb{C}^N$ med element

$$\hat{a}_m = \sum_{n=0}^{N-1} w^{-mn} a_n ; \quad m = 0, \dots, N-1. \qquad (*)$$

<u>Lemma 7.1</u>. Sätt $e_m = (1, w^m, w^{2m}, \dots, w^{(N-1)m})$ för $m = 0, 1, \dots, N-1$. Då är $e_0, e_1, \dots, e_{N-1}$ en ortogonalbas för $\mathbb{C}^n$ och $\|e_m\|^2 = N$.

<u>Bf</u>. Låt $l \neq m$

$$\langle e_l, e_m \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} w^{nl} \overline{w^{nm}} = \{\text{eftersom } \overline{w} = e^{-2\pi i/N} = w^{-1}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} w^{(l-m)n} = \frac{w^{(l-m)N} - 1}{w^{l-m} - 1} = 0.$$

ty $w^N = e^{2\pi i} = 1 \Rightarrow w^{(l-m)N} = 1^{(l-m)} = 1$, medan $w^{l-m} \neq 1$, $(l \neq m)$.

För $l = m$ är $\|e_m\|^2 = \langle e_m, e_m \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} w^0 = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$.

<u>Sats</u>. $a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w^{mn} \hat{a}_m$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. <u>Invers transform</u>

$$\sum_{m=0}^{N-1} |\hat{a}_m|^2 = N \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 \quad (\text{"Parseval"}).$$

<u>Bevis</u> Enligt Lemma 7.1, kan varje $a \in \mathbb{C}^N$ skrivas som

$$a = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{N} \underbrace{\langle a, e_m \rangle}_{\hat{a}_m} e_m$$

Men

$$\langle a, e_m \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \overline{w^{nm}} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n w^{-nm} = \hat{a}_m, \quad \text{enl } (*).$$

Varför

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{a}_m w^{nm} \quad n\text{-te komponenten av } a = \frac{1}{N} \sum_{m=0} \hat{a}_m e_m.$$

Pythagoras sats: $\|a\|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} |\hat{a}_m|^2 \cdot \underbrace{N}_{\langle e_m, e_m \rangle} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |\hat{a}_m|^2$

dvs

$$\sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |\hat{a}_m|^2. \quad \square$$