

**TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng, LÖSNIGAR**

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

1. Utveckla funktionen  $f(x) = x^3, 1 < x < 2, f(x) = 0, 0 < x < 1$  i serie  $\sum c_k J_3(\mu_k x/2)$  på intervallet  $(0, 2)$  där  $\mu_k$  är positiva nollställen av  $J_3$ .

2. Ett ringformigt membran  $1 \leq r \leq 3$  i polära koordinater har inre randen  $r = 1$  fixerad, medan den yttre randen  $r = 3$  vibrerar med vinkel-frekvensen  $\omega$  och samma amplituden 2 för alla punkter på den yttre randen. Membranets rotationssymmetriska vibrationer beskrivs av ekvationerna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right), 1 < r < 3, t > 0, u(1, t) = 0, u(3, t) = 2 \sin(\omega t). \quad (1)$$

Bestäm den stationära rotationssymmetriska svängningsrörelsen, dvs. en lösning på formen  $u(r, t) = v(r) \sin \omega t$ . För vilka  $\omega$  finns en sådan lösning??

3. Med hjälp av konforma avbildningen till det övre halvplanet hitta en harmonisk funktion  $u(x, y)$  i enhetsdisken  $x^2 + y^2 < 1$  som har på cirkeln  $x^2 + y^2 = 1$ , eller  $r = 1$  i polära koordinater  $r, \theta$ , gränsvärdena  $u = 1$  på cirkelbågen  $0 < \theta < \pi/4$  och  $u = 0$  på resten av cirkeln.

4. Funktionen  $f(t)$  har Fouriertransformen

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\omega^2 \theta(\omega)}{(1 + \omega^2)^2}$$

där  $\theta(\omega)$  är Heavisides funktion. Beräkna  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-|t|} \operatorname{sgnt} dt$

5. Lös Laplaceekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

i rektangeln  $0 < x < \pi, 0 < y < 1$  med gränsvilkoren  $u(0, y) = 0, u_x(\pi, y) = 0, u(x, 0) = u(x, 1) = \sin(x/2)$ .

6. Lös problemet

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + u, & 0 < x < \pi/2, t > 0, \\ u(0, t) = 1, u(\pi/2, t) = 0, & u(x, 0) = \cos(x) \end{cases}$$

7. a) Ortogonala och ortonormala funktionssystem. Hur transformerar man ett ortogonalt system till ett ortonormalt system? Fullständiga system.

b) Konformavbildningar och ström. Nivåkurvor.

8. Härleda formeln för genererande funktion för Besselfunktioner.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdiggrättas fredagen 28.jan.

G.Rozenblioum