Extra övningar i Fourieranalys F2/Kf2, TM13

1. Funktionen $f(x)$ är 2-periodisk, och $f(x)=(x+1)^2$ för $-1<x<1$. Utveckla $f(x)$ i komplex trigonometrisk Fourierserie. Sök en 2-periodisk lösning till ekvationen

$$2y''-y'-y=f(x).$$

(perioden är $T=2$)

Lösning. Ansätt $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega x} = \left\{\Omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x}$,

där
$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-1}^{1} f(x)e^{-in\pi x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x+1)^2 e^{-in\pi x}\,dx=\{n\neq 0\}$$
$$=\frac{1}{2}\left[(x+1)^2\frac{e^{-in\pi x}}{-in\pi}\right]_{-1}^{1}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}2(x+1)\frac{e^{-in\pi x}}{-in\pi}\,dx=2\frac{(-1)^n}{-in\pi}-\left[(x+1)\frac{e^{-in\pi x}}{(-in\pi)^2}\right]_{-1}^{1}$$
$$+\int_{-1}^{1}\frac{e^{-in\pi x}}{(-in\pi)^3}\,dx=\frac{2i(-1)^n}{n\pi}-\frac{2(-1)^n}{-n^2\pi^2}+0=\frac{2(-1)^n(1+in\pi)}{n^2\pi^2}.$$

$$c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x+1)^2\,dx=\frac{1}{2}\left.\frac{(x+1)^3}{3}\right|_{-1}^{1}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

$$f(x)\quad\frac{4}{3}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+in\pi)}{n^2}e^{in\pi x}.$$

$2y''-y'-y=f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x}$. Ansätt $y=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{in\pi x} \Rightarrow$

$$2y''-y'-y=\sum_{-\infty}^{\infty}\left[2(in\pi)^2-(in\pi)-1\right]y_n e^{in\pi x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\pi x}$$

$$\Rightarrow \left[-2n^2\pi^2-in\pi-1\right]y_n=c_n \quad \forall n$$

$n=0$: $\quad -y_0=c_0 \Rightarrow y_0=-c_0=-\frac{4}{3}.$

$n\neq 0$: $\quad -\left[2n^2\pi^2+in\pi+1\right]y_n=\frac{2}{\pi^2}\frac{(-1)^n(1+in\pi)}{n^2} \Rightarrow$

$$y_n=\frac{2}{\pi^2}\frac{(-1)^{n-1}(1+in\pi)}{n^2(2n^2\pi^2+in\pi+1)}.$$

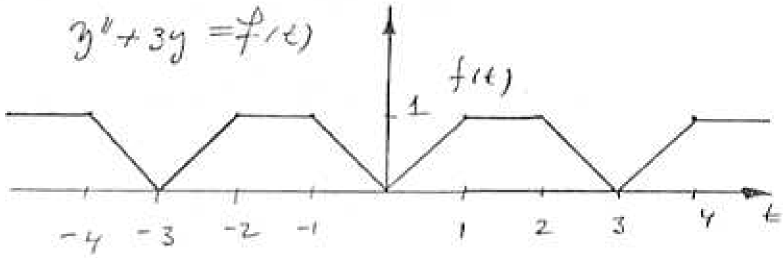
$$y=-\frac{4}{3}+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(1+in\pi)}{n^2(2n^2\pi^2+in\pi+1)}e^{in\pi x}.$$

2. Funktionen $f(t)$ är 3-periodisk, och

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{för} \quad 0 \le t \le 1 \\ 1 & \text{för} \quad 1 < t < 2 \\ 3-t & \text{för} \quad 2 \le t \le 3 . \end{cases}$$

Bestäm, i form av en trigonometrisk Fourierserie, en periodisk lösning till differentialekvationen

$$y'' + 3y = f(t)$$



Lösning.

Fig. Visar att f är jämn; $T = 3$, $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t$$

där $b_n = 0$, $\underline{a_n} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\Omega t \, dt = \frac{2}{3}\cdot 2\int_0^{3/2} f(t)\cos n\Omega t\, dt$

$$= \frac{4}{3}\left\{\int_0^1 t\cos(n\Omega t)\,dt + \int_1^{3/2}\cos(n\Omega t)\,dt\right\} = \frac{4}{3}\left\{\left[t\,\frac{\sin n\Omega t}{n\Omega}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin n\Omega t}{n\Omega}\,dt\right.$$

$$\left. + \left[\frac{\sin n\Omega t}{n\Omega}\right]_1^{3/2}\right\} = \frac{4}{3}\left\{\cancel{\frac{\sin n\Omega}{n\Omega}} + \left[\frac{\cos n\Omega t}{(n\Omega)^2}\right]_0^1 + \frac{\sin n\Omega\frac{3}{2}}{n\Omega} - \cancel{\frac{\sin n\Omega}{n\Omega}}\right\}$$

$$= \frac{4}{3}\left\{\frac{\cos n\Omega - 1}{(n\Omega)^2} + \cancel{\frac{\sin n\pi}{n\Omega}}^{\,0}\right\} = \underline{\underline{\frac{3}{\pi^2}\,\frac{\cos\frac{2n\pi}{3} - 1}{n^2}}} \quad \text{för} \quad n \ge 1.$$

$$\underline{a_0} = \frac{4}{3}\left\{\int_0^1 t\,dt + \int_1^{3/2} dt\right\} = \underline{\frac{4}{3}}.$$

$$\underline{\underline{f(t) = \frac{2}{3} - \frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\frac{2n\pi}{3}}{n^2}\cos\frac{2n\pi t}{3}.}}$$

$y'' + 3y = f(t)$. Ansätt $y(t) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)$

$$y'' + 3y = 3y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4n^2\pi^2}{9} + 3\right) y_n \cos\frac{2n\pi}{3} = f(t)$$

$$\therefore \quad 3y_0 = \frac{2}{3}, \qquad \left(3 - \frac{4\pi^2 n^2}{9}\right) y_n = -\frac{3}{\pi^2}\,\frac{1 - \cos\frac{2n\pi}{3}}{n^2}.$$

$$\underline{\underline{y(t) = \frac{2}{9} - \frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\frac{2n\pi}{3}}{n^2\left(3 - \frac{4n^2\pi^2}{9}\right)}\cos\frac{2n\pi}{3}t.}}$$

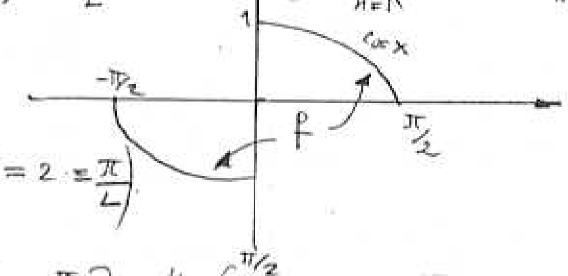
3. Utveckla funktionen $\cos(x)$ i sinusserie på intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$.

Använd resultatet för att beräkna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}.$$

<u>Lösning</u> Utv. $\cos(x)$ till en $2L = \pi$ periodisk <u>udda</u> funktion f på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega x + b_n \sin n\Omega x$$



f udda $\Rightarrow a_n = 0, \ \forall n \geq 0$

(obs! $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \{\text{perioden } T = \pi\} = 2 = \frac{\pi}{L}$)

$$\underline{b_n} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx = \{L = \tfrac{\pi}{2}\} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x) \sin \frac{n\pi x}{\pi/2}\, dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos x \sin 2nx\, dx = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x\right] dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{2n+1}\cos(2n+1)x\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}\right) = \underline{\frac{8n}{\pi(4n^2-1)}}$$

$$\therefore \quad f(x) \cong \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1}\sin(2nx) \quad \text{dvs}$$

$$(1) \quad \underline{\underline{\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1}\sin(2nx),}} \quad \text{för} \quad x \in (0, \pi/2).$$

Multip. (1) med $\cos(x)$, $\int_0^{\pi/2}$ & byt! $\int_0^{\pi/2}$ & $\sum$ i HL $\Rightarrow$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \cos x\, dx = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1}\int_0^{\pi/2} \sin(2nx)\cos(x)\, dx \iff$$

$$\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right] dx = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1}\cdot\frac{2n}{4n^2-1} \iff$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2} \Rightarrow \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{64}}}$$

4. Låt $f(t) = 1-t^2$ för $|t| \le 1$ och låt f vara 2-periodisk. Bestäm en begränsad lösning till.

$$\begin{cases} \text{(PDE)} & \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x>0, \quad -\infty<t<\infty \\ \text{(IC)} & u(0,t) = f(t), \quad -\infty<t<\infty. \end{cases}$$

Lösning: Utveckla $f(t)$ i trigonometrisk Fourierserie $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}$

där $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$; $c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-t^2)\, e^{-in\pi t}dt = [n\neq 0] = \frac{1}{2}\underbrace{\left[(1-t^2)\frac{e^{-in\pi t}}{-in\pi}\right]_{-1}^{1}}_{0}$

$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(-2t)\frac{e^{-in\pi t}}{-in\pi}dt = \left[t\frac{e^{-in\pi t}}{(-in\pi)^2}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{e^{-in\pi t}}{(-in\pi)^2}dt = \frac{-1}{n^2\pi^2}\left(e^{-in\pi}+e^{in\pi}\right) - \underbrace{\left.\frac{e^{-in\pi t}}{(-in\pi)^3}\right|_{-1}^{1}}_{=0}$

$= \dfrac{-2(-1)^n}{n^2\pi^2}$; $c_0 = \int_0^1(1-t^2)dt = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$$\therefore f(t) = \frac{2}{3} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{in\pi t}.$$

Ansätt en periodisk lösning: $u(x,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_n(x)e^{in\pi t}$, där $u_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}u(x,t)e^{-in\pi t}$ är begr.

$u(0,t) = \sum_{-\infty}^{\infty}u_n(0)e^{in\pi t} = f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{in\pi t}$; varför $\underline{u_n(0) = c_n}$ för alla n.

(PDE) $\Leftrightarrow \sum_{-\infty}^{\infty}u_n(x)(in\pi)e^{in\pi t} = \sum_{-\infty}^{\infty}u_n''(x)e^{in\pi t} \Rightarrow \begin{cases}(in\pi)u_n - u_n'' = 0 & \text{(ODE)} \\ u_n(0) = c_n, & \forall n.\end{cases}$

kar. ekv. $r^2 = in\pi \Rightarrow \begin{cases} r_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\sqrt{n\pi} & n>0 \\ r_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\sqrt{|n|\pi} & n<0,\end{cases}$

(påst $\sqrt{\pm i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i) \Leftrightarrow \pm i = \frac{1}{2}(1\pm i)^2 \Leftrightarrow \pm i = \frac{1}{2}(1+i^2 \pm 2i) \Leftrightarrow \pm i = \pm i$).

rötterna är r_1 och r_2 där $\mathrm{Re}\, r_1<0$, $\mathrm{Re}\, r_2>0$ i allmänna lösningen

$u_n(x) = A_n e^{r_1 x} + B_n e^{r_2 x}$. Men $|e^{r_2 x}| \to \infty$, då $x\to\infty$, varför $B_n = 0$. (u_n begr.)

för $n=0$ får istället $u_0 = A_0 + B_0 x$ ($u_0'' = 0$ i (ODE)),

där $B_0 = 0$ för begränsad lösning.

$\Rightarrow \begin{cases} u_n(x) = A_n e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i\,\mathrm{sign}\, n)\sqrt{|n|\pi}\, x} \\ u_n(0) = A_n = c_n, \quad n\in\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow u_n(x) = c_n e^{-\sqrt{\frac{|n|\pi}{2}}(1+i\,\mathrm{sign}\, n)x}$

$u(x,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{-\sqrt{\frac{|n|\pi}{2}}(1+i\,\mathrm{sign}\, n)x}\, e^{in\pi t}$

$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{c_n e^{-\sqrt{\frac{n\pi}{2}}}e^{i\left(n\pi t - \sqrt{\frac{n\pi}{2}}x\right)} + c_{-n}e^{-\sqrt{\frac{n\pi}{2}}}e^{i\left(-n\pi t + \sqrt{\frac{n\pi}{2}}x\right)}\right\}$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2}e^{-\sqrt{\frac{n\pi}{2}}}\cos\left(n\pi t - \sqrt{\frac{n\pi}{2}}x\right).$$

5. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$ i cirkelringen $1<r<2$ (polära koordinater) med randvillkoren $u(1,\theta)=0$, $u(2,\theta)=f(\theta)$, där $f(\theta)$ är 2π-periodisk, och

$$f(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{\pi^2} \quad \text{för } |\theta| \le \pi.$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 & 1<r<2 \\ u(1,\theta) = 0 & \\ u(2,\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{\pi^2}, & |\theta| \le \pi \end{array}}$$

Lösning: För fixt r är lösningen $u(r,\theta)$ 2π-periodisk i θ. Ansätt $u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(r) e^{in\theta}$.

Insättning i diff. ekv. ger $\sum_{-\infty}^{\infty}\left[\left(u_n'' + \frac{1}{r}u_n'\right)e^{in\theta} - \frac{1}{r^2}n^2 u_n e^{in\theta}\right] = 0$

$u_n'' + \frac{1}{r}u_n' - \frac{n^2}{r^2}u_n = 0 \Rightarrow$

$r^2 u_n'' + r u_n' - n^2 u_n = 0$ Euler ekv av ordning n som har lösning av formen r^p: $r^2 p(p-1) r^{p-2} + r p r^{p-1} - n^2 r^p = 0$

$p^2 - p + p - n^2 = 0$, $p = \pm n$, $u_n(r) = a_n r^n + b_n r^{-n}$ för $n \ne 0$

För $n=0$ fås en dubbelrot och lösningen $u_0(r) = a_0 + b_0 \ln r$.

$$u(r,\theta) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n\ne 0} (a_n r^n + b_n r^{-n}) e^{in\theta}$$

$$u(1,\theta) = a_0 + \sum_{n \ne 0} (a_n + b_n) e^{in\theta} = 0$$

$$u(2,\theta) = a_0 + b_0 \ln 2 + \sum_{n\ne 0} (a_n 2^n + b_n 2^{-n}) e^{in\theta} = f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

$$\begin{cases} a_0 = 0, & a_n + b_n = 0 \quad \text{för } n \ne 0 \\ a_0 + b_0 \ln 2 = c_0, & a_n 2^n + b_n 2^{-n} = c_n \quad \text{för } n \ne 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_0 = 0, \quad b_0 = \frac{c_0}{\ln 2}, \quad a_n = \frac{c_n}{2^n - 2^{-n}}, \quad b_n = -a_n \quad \text{för } n \ne 0.$$

Utveckla $f(\theta)$ i trigonometrisk Fourierserie:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - \frac{\theta^2}{\pi^2}\right)e^{-in\theta}\,d\theta, \qquad c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{\theta^2}{\pi^2}\right)d\theta = \frac{2}{3}.$$

$$n \ne 0: \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\cancel{\left(1 - \frac{\theta^2}{\pi^2}\right)}\frac{e^{-in\theta}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\theta}{\pi^2}\cdot\frac{e^{-in\theta}}{-in}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\theta}{\pi^2}\cdot\frac{e^{-in\theta}}{(-in)^2}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2}{\pi^2}\frac{e^{-in\theta}}{-n^2}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{\pi^2}\cdot\frac{e^{-in\pi}}{-n^2}\cdot 2$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2}$$

$$u(r,\theta) = \frac{2}{3\ln 2}\ln r + \frac{2}{\pi^2}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\ne 0}}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2(2^n - 2^{-n})}(r^n - r^{-n})e^{in\theta}.$$

6. Fouriertransformera

a) $\frac{t}{(t^2+a^2)^2}$, b) $\frac{1}{(t^2+a^2)^2}$, c) $\frac{t}{(t^2+1)(t^2+2t+5)}$, d) $e^{-a|t|}\sin bt$ $a>0,\ b>0$

Lösning: Utgå från $F\left[\frac{1}{t^2+a^2}\right] = \frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$. Derivera på t-sidan

$$\Rightarrow \frac{-2t}{(t^2+a^2)^2} \overset{F}{\supset} (i\omega)\frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{t}{(t^2+a^2)^2} \overset{F}{\supset} -i\frac{\pi}{2a}\omega e^{-a|\omega|}}}$$

b) Def. av F-transf. $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t^2+a^2}e^{-i\omega t}dt = \frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$

derivera m.a.p. a: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-2a}{(t^2+a^2)^2}e^{-i\omega t}dt = -\frac{\pi}{a^2}e^{-a|\omega|}-\frac{\pi}{a}|\omega|e^{-a|\omega|}$

$$F\left[\frac{1}{(t^2+a^2)^2}\right] = \frac{\pi}{2a^3}e^{-a|\omega|}+\frac{\pi}{2a^2}|\omega|e^{-a|\omega|} \underline{\underline{= \frac{\pi}{2a^3}(1+a|\omega|)e^{-a|\omega|}}}$$

c) $\frac{t}{(t^2+1)(t^2+2t+5)} = \frac{A+Bt}{t^2+1}+\frac{C+Dt}{t^2+2t+5} = f(t)$

$t=0$: $\underline{0 = A+\frac{C}{5}}$ (1) $\Rightarrow C=-5A$

Mult. båda leden med t & låt $t\to\infty$: $\underline{0 = B+D}$ (2)

Mult. " " " (t^2+1) & sätt $t=i$: $\frac{i}{-1+2i+5} = A+Bi \Rightarrow$

$A+iB = \frac{i}{2(2+i)} = \frac{i(2-i)}{2(4+1)} = \frac{1}{10}(2i+1) \Rightarrow \underline{A=\frac{1}{10}}$ & $\underline{B=\frac{1}{5}}$

(1) $\Rightarrow \underline{C=-5A=-\frac{1}{2}}$ & (2) $\Rightarrow \underline{D=-B=-\frac{1}{5}}$.

$\therefore f(t) = \frac{\frac{1}{10}+\frac{1}{5}t}{t^2+1} - \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}t}{t^2+2t+5} = \frac{1}{10}\frac{1+2t}{t^2+1} - \frac{\frac{3}{10}+\frac{1}{5}(t+1)}{(t+1)^2+4}$;

$\underline{\underline{\frac{1}{t^2+1}\overset{F}{\supset}\pi e^{-|\omega|}}}$, $e^{-|t|}\operatorname{sign} t \overset{F}{\supset} \frac{-2i\omega}{1+\omega^2} \overset{\text{Symm}}{\Rightarrow} \underline{\underline{\frac{t}{1+t^2}}} \supset \frac{i}{2}\cdot 2\pi e^{-|\omega|}\operatorname{sign}(-\omega) \underline{\underline{= -i\pi e^{-|\omega|}\operatorname{sign}(\omega)}}$

$\frac{t/2}{1+(t/2)^2} = \frac{2t}{t^2+4} \underset{\varepsilon=1/2}{\overset{\text{Skalning}}{\supset}} -2i\pi e^{-2|\omega|}\operatorname{sign}(2\omega) \rightarrow \frac{t}{t^2+4}\overset{F}{\supset} -i\pi e^{-2|\omega|}\operatorname{sign}(\omega)$

$\Rightarrow \underline{\frac{t+1}{(t+1)^2+4}\overset{F}{\supset} -i\pi e^{i\omega}e^{-2|\omega|}\operatorname{sign}(\omega)}$; $\frac{1}{t^2+4}\supset\frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|} \Rightarrow \underline{\frac{1}{(t+1)^2+4}\overset{F}{\supset}\frac{\pi}{2}e^{i\omega}e^{-2|\omega|}}$.

$$\underline{\underline{\hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{10}e^{-|\omega|}(1-2i\operatorname{sign}(\omega)) - \frac{\pi}{10}e^{-2|\omega|}e^{i\omega}\left(\frac{3}{2}-2i\operatorname{sign}(\omega)\right)}}.$$

d) $e^{-a|t|}\supset\frac{2a}{\omega^2+a^2} \Rightarrow e^{-a|t|}\sin bt = e^{-a|t|}\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{ibt}-e^{-ibt}\right)\overset{F}{\supset}$

$\frac{1}{2i}\left(\frac{2a}{(\omega-b)^2+a^2}-\frac{2a}{(\omega+b)^2+a^2}\right) = ia\left(\frac{1}{\omega^2+2b\omega+b^2+a^2}-\frac{1}{\omega^2-2b\omega+b^2+a^2}\right)$

$$\underline{\underline{\therefore\ e^{-a|t|}\sin bt \overset{F}{\supset} \frac{-4iab\omega}{(\omega^2+2b\omega+a^2+b^2)(\omega^2-2b\omega+a^2+b^2)}}}.$$

7. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega) = \dfrac{\omega}{1+\omega^4}$. Beräkna

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\,dt$, b) $f'(0)$.

Lösning:

a) $t f(t) \overset{F}{\supset} i \hat{f}'(\omega) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} i\hat{f}'(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-i\omega t}\,dt \overset{\omega=0}{\Longrightarrow}$

$$\underline{\underline{\int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\,dt}} = i\hat{f}'(0) = i \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{1+\omega^4}\right)\Big|_{\omega=0} = i\,\frac{1+\omega^4-4\omega^4}{(1+\omega^4)^2}\Big|_{\omega=0} = \underline{\underline{i}}.$$

b) $f'(t) \overset{F}{\supset} i\omega \hat{f}(\omega) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f'(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} i\omega \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\,d\omega$

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\omega \hat{f}(\omega)\,d\omega = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{1+\omega^4}\,d\omega.$$

Obs! $g(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$ har poler i $\{z_k : 1+z_k^4 = 0\}$ dvs

$z_k^4 = -1 = e^{i\pi(2k+1)} \Longleftrightarrow z_k = e^{i(2k+1)\pi/4}$, $k = 0,1,2,3$.

I övre halvplanet ligger $z_0 = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ och $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} g(z) = \frac{z^2}{4z^3}\Big|_{z=z_0} = \frac{1}{4z_0} = \frac{\bar{z}_0}{4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i).$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} g(z) = \frac{1}{4z_1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1-i).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=z_0} g(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_1} g(z)\right) = 2\pi i \frac{1}{4\sqrt{2}}(\cancel{1}-i-\cancel{1}-i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

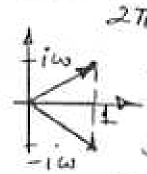
$$\underline{\underline{f'(0) = \frac{i}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{i}{2\sqrt{2}}}}.$$

8. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\frac{1-i\omega}{1+i\omega}\,\frac{\sin\omega}{\omega}$. Beräkna

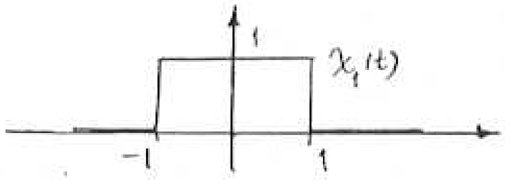
$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt.$$

Lösning: $\hat{f}(\omega)=\frac{1-i\omega}{1+i\omega}\cdot\frac{\sin\omega}{\omega}$. Enligt Parsevals

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1-i\omega}{1+i\omega}\right|^2\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\,d\omega$$

$$=\left\{\left|\frac{1-i\omega}{1+i\omega}\right|=1\right.$$  $$\left.\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2d\omega=$$

Vi har att $x_1(t)=\theta(t+1)-\theta(t-1)\overset{\mathcal{F}}{\supset}2\,\frac{\sin\omega}{\omega}$.



Alltså

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\left[\theta(t+1)-\theta(t-1)\right]\right\}^2dt=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}dt=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\ \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt=\frac{1}{2}.\quad\blacksquare$$

9. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx$ med hjälp av Fouriertransform.

<u>Lösning</u>: $\chi_a(x) \overset{F}{\supset} \frac{2\sin a\xi}{\xi} = \hat{\chi}_a(\xi) \Rightarrow \{\text{Symmetri}\} \Rightarrow$

$$\frac{2\sin ax}{x} \overset{F}{\supset} 2\pi\chi_a(-\xi) = 2\pi\chi_a(\xi) = 2\pi\left[\theta(\xi+a)-\theta(\xi-a)\right]$$

Sätt $a=1$ får $\frac{\sin x}{x} \overset{F}{\supset} \pi\left[\theta(\xi+1)-\theta(\xi-1)\right]$.

Vidare gäller det $\frac{1}{x^2+1} \overset{F}{\supset} \pi e^{-|\xi|}$.

Plancherel $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \pi\left[\theta(\xi+1)-\theta(\xi-1)\right]\pi e^{-|\xi|}\,d\xi$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} e^{-|\xi|}\,d\xi = \pi\int_0^1 e^{-\xi}\,d\xi = \pi\left[-e^{-\xi}\right]_0^1 = \underline{\underline{\pi(1-e^{-1})}}.$$

10. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\dfrac{1}{|\omega|^3+1}$. Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f * f'|^2\,dt,$$

där $*$ betyder faltning.

<u>Lösning</u>: Om $f(t) \overset{F}{\supset} \hat{f}(\omega)$ så $f'(t) \overset{F}{\supset} (i\omega)\hat{f}(\omega) = \hat{f}'(\omega)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f*f'|^2\,dt = \{\text{parseval}\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |(f*f')^\wedge|^2\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}\cdot\hat{f}'|^2\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{|\omega|^3+1}\cdot\frac{i\omega}{|\omega|^3+1}\right)\left(\frac{1}{|\omega|^3+1}\cdot\frac{\overline{i\omega}}{|\omega|^3+1}\right)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^2\,d\omega}{(|\omega|^3+1)^4} = \{\text{jämn integrand}\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega^2\,d\omega}{(\omega^3+1)^4} =$$

$$= \{\omega^3 = z \Rightarrow 3\omega^2\,d\omega = dz\} = \frac{1}{3\pi}\int_0^{\infty}\frac{dz}{(z+1)^4} = -\frac{1}{9\pi}(z+1)^{-3}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{9\pi}.$$

$$\underline{\underline{\int_{-\infty}^{\infty}|f*f'|^2\,dt = \frac{1}{9\pi}}}.$$

11. Ange Fouriertransformen till funktionen

$$f(t) = \int_0^2 \frac{\sqrt{\omega}}{1+\omega}\, e^{i\omega t}\, d\omega.$$

Beräkna a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos t\, dt$, b) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$.

Lösning:

$$f(t) = \int_0^2 \frac{\sqrt{\omega}}{1+\omega}\, e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

Varav vi använder

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2\pi\sqrt{\omega}}{1+\omega}, & \text{om } 0<\omega<2 \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

a) $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos t\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})\, dt = \frac{1}{2}\left[\hat{f}(-1)+\hat{f}(1)\right] = \frac{1}{2}\left(0+\frac{2\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

b) Parseval. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^2 \frac{(2\pi)^2\omega}{(1+\omega)^2}\, d\omega$

$$= [1+\omega = y] = 2\pi\int_1^3 \frac{y-1}{y^2}\, dy = 2\pi\int_1^3 \left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}\right) dy = 2\pi\left[\ln y + \frac{1}{y}\right]_1^3$$

$$= 2\pi\left(\ln 3 + \frac{1}{3} - 0 - 1\right) = 2\pi\left(\ln 3 - \frac{2}{3}\right).$$

<u>a</u>. $\underline{\underline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos t\, dt = \frac{\pi}{2}}}$. <u>b</u>. $\underline{\underline{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi\left(\ln 3 - \frac{2}{3}\right)}}$.

12. Låt $f(t) = \int_0^1 \sqrt{\omega}\, e^{\omega^2} \cos \omega t \, d\omega$. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt$.

Lösning: $f(t) = \int_0^1 \sqrt{\omega}\, e^{\omega^2} \cos(\omega t)\, d\omega = \int_0^1 \sqrt{|\omega|}\, e^{\omega^2} \cos(\omega t) d\omega = \{\text{jämn}\}$

$= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \sqrt{|\omega|}\, e^{\omega^2}(\cos \omega t + i \sin \omega t) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$, där

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \pi \sqrt{|\omega|}\, e^{\omega^2} & \text{för } |\omega| \le 1 \\ 0 & \text{för } |\omega| > 1 \end{cases}$$

obs! $\hat{f}$ ej kont.

$f'(t) \supset (i\omega)\hat{f}(\omega)$

Plancherel: $\underline{\underline{\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |i\omega \hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \omega^2 \pi^2 |\omega| e^{2\omega^2} d\omega$

$= \{\text{jämn}\} = \frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^1 \omega^3 e^{2\omega^2} d\omega = [2\omega^2 = v,\ 4\omega\, d\omega = dv]$

$= \pi \int_0^2 \frac{v}{2} e^v \cdot \frac{1}{4} dv = \frac{\pi}{8}\int_0^2 v e^v dv = \frac{\pi}{8}\left\{[ve^v]_0^2 - \int_0^2 e^v dv\right\}$

$= \frac{\pi}{8}\{2e^2 - (e^2 - 1)\} = \underline{\underline{\frac{\pi}{8}(e^2+1)}}.$

13. Bestäm en lösning till ekvationen

$$(IDE) \qquad u'(t)+2u(t)+e^{-2t}\int_{-\infty}^{t} e^{2\tau}u(\tau)\,d\tau = \delta(t).$$

<u>Lösning</u>: Fouriertransformera:

Integraltermen är $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{2(\tau-t)}u(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\theta(t-\tau)e^{-2(t-\tau)}u(\tau)\,d\tau$

$= \{\theta(t)e^{-2t}\} * \{u(t)\}$

$$\underline{\underline{\theta(t)e^{-2t}}} \overset{F}{\supset} \int_{-\infty}^{\infty}\theta(t)e^{-2t}e^{-i\xi t}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-(2+i\xi)t}\,dt = -\frac{e^{-(2+i\xi)t}}{2+i\xi}\Bigg|_0^{\infty} = \underline{\underline{\frac{1}{2+i\xi}}}$$

F-transf. av (IDE) $\Rightarrow (i\xi)\hat{u}(\xi)+2\hat{u}(\xi)+\frac{1}{2+i\xi}\hat{u}(\xi)=1,$

$$\left(i\xi+\frac{1}{2+i\xi}+2\right)\hat{u}(\xi)=1, \quad \frac{-\xi^2+4i\xi+5}{2+i\xi}\hat{u}(\xi)=1,$$

$$\hat{u}(\xi)=\frac{2+i\xi}{-\xi^2+4i\xi+5}=[s=i\xi]=\frac{2+s}{s^2+4s+5}=\frac{2+s}{(s+2-i)(s+2+i)}=\{Pbu\}$$

$$=\frac{A}{s+2-i}+\frac{B}{s+2+i} \Rightarrow \{HPM\} \Rightarrow A=\frac{i}{2i}=\frac{1}{2}, \quad B=\frac{-i}{-2i}=\frac{1}{2}.$$

$$\hat{u}(\xi)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2+i(\xi-1)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2+i(\xi+1)}$$

$$\frac{1}{2+i\xi} \overset{F}{\subset} \theta(t)e^{-2t} \Rightarrow \frac{1}{2+i(\xi\pm1)} \overset{F}{\subset} e^{\mp it}\theta(t)e^{-2t}.$$

$$u(t)=\frac{1}{2}\cdot e^{it}\theta(t)e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-it}\theta(t)e^{-2t} = \underline{\underline{\theta(t)e^{-2t}\cos t}}.$$

14. Lös integralekvationen

$$\int_0^\infty e^{-\tau} u(t-\tau)\,d\tau - \int_{-\infty}^0 e^{\tau} u(t-\tau)\,d\tau = \sqrt{3}\,u(t) - e^{-|t|}.$$

Lösning: Vi kan skriva ekvationen som

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}\,\mathrm{sign}\,\tau\; u(t-\tau)\,d\tau = \sqrt{3}\,u(t) - e^{-|t|}, \quad \text{dvs}$$

$$\{e^{-|t|}\,\mathrm{sign}\,t\} * \{u(t)\} = \sqrt{3}\,u(t) - e^{-|t|}.$$

Fouriertransform. ger $\quad \dfrac{-2i\omega}{1+\omega^2}\,\hat{u}(\omega) = \sqrt{3}\,\hat{u}(\omega) - \dfrac{2}{1+\omega^2},$

$$\hat{u}(\omega)\left(\sqrt{3} + \frac{2i\omega}{1+\omega^2}\right) = \frac{2}{1+\omega^2}, \qquad \hat{u}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{3}\,(1+\omega^2) + 2i\omega}$$

$$\{\text{Sätt } s = i\omega\} \Rightarrow \hat{u} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{s^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}s - 1} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(s-\sqrt{3})}$$

$$= \{\text{Partialbråksuppdelning}\} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+\frac{1}{\sqrt{3}}} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}+i\omega} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{3}-i\omega}.$$

$$\left\{\begin{array}{l} e^{-at}\,\theta(t) \supset \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}\,\theta(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}\,dt = \left[\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)}\right]_{t=0}^{\infty} \\[2ex] \Rightarrow \underline{\underline{e^{-a|t|}\,\theta(t) \overset{\mathcal{F}}{\supset} \dfrac{1}{a+i\omega}}} \\[2ex] \underline{\underline{e^{at}(1-\theta(t))}} = e^{at}\,\theta(-t) = \{\text{byt! } t \text{ mot } -t \text{ ovan}\} = \dots = \underline{\underline{\dfrac{1}{a-i\omega}}} \end{array}\right.$$

Alltså:

$$u(t) = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}t}\,\theta(t) + \frac{1}{2}\,e^{\sqrt{3}t}\,(1-\theta(t)) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,e^{-\frac{t}{\sqrt{3}}}, & t \geq 0 \\ \frac{1}{2}\,e^{\sqrt{3}t}, & t < 0. \end{cases}$$

15. Bestäm en lösning till ekvationen

$$u(t) + \int_{-\infty}^{t} e^{\tau - t}\, u(\tau)\, d\tau = e^{-2|t|}.$$

Lösning. Vi har att $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{\tau-t}\, u(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)}\, \theta(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$

$$= \{e^{-t}\theta(t)\} * \{u(t)\}.$$

F-transf. $\Rightarrow$ $\displaystyle \hat{u}(\xi) + \frac{1}{1+i\xi}\hat{u}(\xi) = \frac{4}{\xi^2+4} \Rightarrow \hat{u}(\xi)\left(1+\frac{1}{i\xi+1}\right) = \frac{4}{\xi^2+4}$

$$\hat{u}(\xi) = \frac{4(i\xi+1)}{(i\xi+2)(\xi^2+4)} = 4\cdot\left(\frac{i\xi+2}{(i\xi+2)(\xi^2+4)} - \frac{1}{(i\xi+2)(\xi^2+4)}\right).$$

[PBU] $\Rightarrow$ $\displaystyle \frac{1}{(i\xi+2)(\xi^2+4)} = \frac{1}{(2-i\xi)(2+i\xi)^2} = \frac{A}{2-i\xi} + \frac{B}{2+i\xi} + \frac{C}{(2+i\xi)^2}$

$\left\{\text{HP} \Rightarrow A = \frac{1}{16},\ C = \frac{1}{4}\right\} = \left[\frac{1}{16}(2+i\xi)^2 + B(4+\xi^2) + \frac{1}{4}(2-i\xi)\right] / N$

{där N = Nämnaren $= (i\xi+2)(\xi^2+4)$}.

Identif. av koeff. i ξ^2: $-\frac{1}{16} + B = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{16}$.

Alltså $\displaystyle \hat{u}(\xi) = \frac{4}{\xi^2+4} \underbrace{- \frac{1}{4}\frac{1}{2-i\xi} - \frac{1}{4}\frac{1}{2+i\xi}} - \frac{1}{(2+i\xi)^2}$

$$= \frac{4}{\xi^2+4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{\xi^2+4} + \frac{d}{d\xi}\left(\frac{i}{2+i\xi}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{u(t) = \frac{3}{4}e^{-2|t|} - t\,e^{-2t}\,\theta(t).}}$$

16. För ett linjärt, tidsinvariant system gäller att insignalen $\frac{1}{1+t^2}$ ger utsignalen $\frac{t}{(4+t^2)^2}$. Bestäm impulssvaret, svaret på $\cos\omega t$.
Är systemet kausalt, stabilt?

Lösning: Då $\frac{1}{t^2+1} \curvearrowright \frac{t}{(4+t^2)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4+t^2}\right)$, följer efter $\mathcal{F}$-transform att

$$-\frac{1}{2}(i\omega)\frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|} = \hat{h}(\omega)\pi e^{-|\omega|}.$$ Alltså är

$$\hat{h}(\omega) = -\frac{i\omega}{4}e^{-|\omega|} = -\frac{1}{4\pi}(i\omega)\pi e^{-|\omega|} \overset{\mathcal{F}}{\subset} -\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^2+1}\right) = h(t)$$

$\Rightarrow$ Impulssvaret är $\underline{\underline{h(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{t}{(t^2+1)^2}}}$.

Obs: Om $h(t)$ är reell gäller det att $S[\cos\omega t] = \mathrm{Re}\left[\hat{h}(\omega)e^{i\omega t}\right]$

Alltså $\underline{\underline{\cos(\omega t)}} \curvearrowright \mathrm{Re}\left[\frac{-i\omega}{4}e^{-|\omega|}(\cos\omega t + i\sin\omega t)\right] = \underline{\underline{\frac{\omega}{4}e^{-|\omega|}\sin\omega t}}$

Observera att $h(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{t}{(t^2+1)^2} \neq 0$ för $t<0$.
Alltså: $\underline{\underline{\text{systemet ej kausalt}}}$! Men

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{t^2+1}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0 < \infty$$

$\underline{\underline{\text{Systemet är stabilt.}}}$

17. Ett linjärt, tidsinvariant system har impulssvaret $h(t) = e^{-4t^2}$. Låt $y(t)$ vara svaret på insignalen e^{-t^2}. Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it} h(t)\, y(t)\, dt.$$

Lösning: $e^{-at^2/2} \overset{\mathcal{F}}{\supset} \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\, e^{-\omega^2/2a} \Rightarrow \{\frac{a}{2} = 4,\ a = 8\}$

$$e^{-4t^2} \overset{\mathcal{F}}{\supset} \sqrt{\frac{2\pi}{8}}\, e^{-\omega^2/16} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\omega^2/16} = \hat{h}(\omega)$$

$$x(t) = e^{-t^2} \overset{\mathcal{F}}{\supset} \{\tfrac{a}{2} = 1,\ a = 2\} \overset{\mathcal{F}}{\supset} \sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2/4} = \hat{x}(\omega)$$

$$\underline{y(t)} = h(t) * x(t) \overset{\mathcal{F}}{\supset} \hat{h}(\omega)\hat{x}(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\omega^2/16} \cdot \sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2/4}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \sqrt{\pi}\, e^{-5\omega^2/16} = \left\{\frac{1}{2a} = \frac{5}{16} \Rightarrow a = \frac{8}{5} \Rightarrow \sqrt{a} = 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{a}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\, e^{-5\omega^2/16} \overset{\mathcal{F}}{\subset} \underline{\underline{\sqrt{\frac{\pi}{5}}\, e^{-4/5\, t^2}}}$$

$$\underline{\underline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{it} h(t)\, y(t)\, dt}} = \sqrt{\frac{\pi}{5}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t^2} \cdot e^{-\frac{4}{5}t^2} e^{it}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{5}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{24}{5}t^2} e^{it}\, dt$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{5}}\, \mathcal{F}\left[e^{-\frac{24}{5}t^2}\right](-1) = \left\{\frac{a}{2} = \frac{24}{5} \Rightarrow a = \frac{48}{5} \Rightarrow \frac{1}{2a} = \frac{5}{96}\right\}$$

$$= \left\{\sqrt{\frac{\pi}{5}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{48/5}} \cdot e^{-\frac{5}{96}\omega^2}\right\}_{\omega=-1} = \frac{\pi}{\sqrt{24}} e^{-5/96} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2\sqrt{6}} e^{-5/96}}}.$$

18. För ett linjärt, tidsinvariant system gäller att insignalen $\frac{1}{4+t^2}$ ger upphov till utsignalen e^{-2t^2}. Beräkna utsignalen (i form av en komplex Fourierserie), då insignalen är impulståget

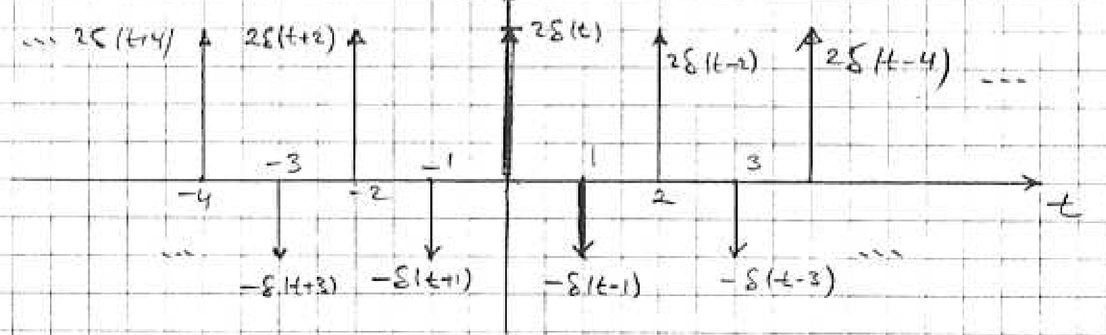
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[2\delta(t-2n)-\delta(t-2n-1)\right].$$

Lösning: $x(t)=\frac{1}{4+t^2} \rightarrow y(t)=e^{-2t^2}$, $\quad \hat{y}(\omega)=\hat{h}(\omega)\,\hat{x}(\omega)$

$$\left\{\hat{x}(\omega)=\frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|};\quad \hat{y}(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\omega^2/8},\quad \left(e^{-at^2/2}\xrightarrow{\mathcal{F}}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,e^{-\omega^2/(2a)}\right)_{a=4}\right\}$$

$$\Rightarrow \hat{h}(\omega)=\frac{\hat{y}(\omega)}{\hat{x}(\omega)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-\omega^2/8+2|\omega|}$$

Impulssignalen, $\quad x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[2\delta(t-2n)-\delta(t-2n-1)\right]$



Fourierserieutveckla $x(t)$ i perioden $T=2$, $\Omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$.

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-1/2}^{3/2}x(t)\,e^{-in\Omega t}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-1/2}^{3/2}\left[2\delta(t)-\delta(t-1)\right]e^{-in\pi t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(2e^{0}-e^{-in\pi}\right)=1-\frac{1}{2}(-1)^n, \qquad x(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\,e^{in\pi t}$$

eftersom $e^{in\pi t}\rightsquigarrow \hat{h}(n\pi)\,e^{in\pi t}$ $\quad$ obs! $\left(e^{i\omega t}\rightsquigarrow \hat{h}(\omega)\,e^{i\omega t}\right)_{\omega=n\pi}$

gäller det att

$$x(t)\rightsquigarrow\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\,\hat{h}(n\pi)\,e^{in\pi t}$$

dvs $\quad x(t)\rightsquigarrow\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2}(-1)^n\right)e^{-\frac{n^2\pi^2}{8}+2|n|\pi}\,e^{in\pi t}.$

19. Låt $x(n)$ vara N-periodisk, och

$$x(n) = \begin{cases} 1, & då \quad 0 \le n \le k-1 \\ 0, & då \quad k \le n \le N-1. \end{cases}$$

Beräkna den diskreta Fouriertransformen och använd Parsevals formel för att beräkna

$$\sum_{\mu=1}^{N-1} \frac{1-\cos\frac{2\pi\mu k}{N}}{1-\cos\frac{2\pi\mu}{N}}.$$

Lösning: $\hat{X}(\mu) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,\omega^{\mu n}, \; \left(\omega = e^{-i\frac{2\pi}{N}}\right) \Rightarrow$

$$\hat{X}(\mu) = \sum_{n=0}^{k-1} (\omega^{\mu})^{n} = \begin{cases} k, & \mu = 0 \\ \frac{\omega^{\mu k}-1}{\omega^{\mu}-1}, & \mu = 1, 2, \ldots, N-1. \end{cases}$$

Parsevals: $\sum_{n=0}^{N-1} \left(x(n)\right)^2 = \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} |\hat{X}(\mu)|^2$

$$\sum_{\mu=0}^{N-1} |\hat{X}(\mu)|^2 = k^2 + \sum_{\mu=1}^{N-1} \frac{\left|e^{-i\frac{2\pi\mu k}{N}}-1\right|^2}{\left|e^{-i\frac{2\pi\mu}{N}}-1\right|^2} =$$

$$= k^2 + \sum_{\mu=1}^{N-1} \frac{\left(\cos\frac{2\pi\mu k}{N}-1\right)^2 + \sin^2\frac{2\pi\mu k}{N}}{\left(\cos\frac{2\pi\mu}{N}-1\right)^2 + \sin^2\frac{2\pi\mu}{N}}$$

$$= k^2 + \sum_{\mu=1}^{N-1} \frac{2\left(1-\cos\frac{2\pi\mu k}{N}\right)}{2\left(1-\cos\frac{2\pi\mu}{N}\right)} = \{\text{Parsevals}\} = N \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = Nk.$$

$$\Rightarrow \sum_{\mu=1}^{N-1} \left(\frac{1-\cos\frac{2\pi\mu k}{N}}{1-\cos\frac{2\pi\mu}{N}}\right) = Nk - k^2 = k(N-k).$$

20. Bestäm den diskreta Fouriertransformen till signalen (Schwensen)

$x(n) = \sin\frac{n\pi}{N}$, $n = 0, \dots, N-1$, $x(n)$ N-periodisk.

<u>Lösning</u>: perioden $T = N$, $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{N}$.

$X(n) = \sin\frac{n\pi}{N}$, $0 \le n \le N-1$; $\omega = e^{2\pi i/N}$

$$\hat{X}(\mu) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,\omega^{-\mu n} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{in\pi/N} - e^{-in\pi/N}\right)e^{-i2\pi\mu n/N}$$

Sätt $v = e^{-i\pi/N}$. Då blir $\hat{X}(\mu) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{N-1}(v^{-n} - v^{n})v^{2\mu n}$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{N-1}\left[v^{(2\mu-1)n} - v^{(2\mu+1)n}\right].$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} v^{(2\mu-1)n} = \sum_{n=0}^{N-1}\left(v^{2\mu-1}\right)^n = \frac{(v^{2\mu-1})^N - 1}{v^{2\mu-1} - 1} = \frac{-2}{v^{2\mu-1} - 1}$$

(ty $v^N = e^{-i\pi} = -1$ och $2\mu - 1$ är ett heltal (udda))

OBS: $v^{2\mu-1} = e^{-i(2\mu-1)\pi/N} \neq 1$.

$\mu \to \mu + 1$ ger $\sum_{n=0}^{N-1} v^{(2\mu+1)n} = \frac{-2}{v^{2\mu+1} - 1}$.

$$\therefore \hat{X}(\mu) = \frac{1}{2i}(-2)\left(\frac{1}{v^{2\mu-1} - 1} - \frac{1}{v^{2\mu+1} - 1}\right) = -\frac{1}{i}\,\frac{v^{2\mu+1} - v^{2\mu-1}}{v^{4\mu} + 1 - (v^{2\mu+1} - v^{2\mu-1})}$$

$$= -\frac{1}{i}\,\frac{v - v^{-1}}{v^{2\mu} + v^{-2\mu} - (v + v^{-1})} = -\frac{1}{i}\,\frac{e^{-i\pi/N} - e^{i\pi/N}}{e^{-i2\mu\pi/N} + e^{i2\mu\pi/N} - (e^{-i\pi/N} + e^{i\pi/N})}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{X}(\mu) = \frac{\sin\pi/N}{\cos 2\mu\frac{\pi}{N} - \cos\frac{\pi}{N}}}.$$

21. Visa att funktionerna $\varphi_n(x) = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\pi x}\, e^{inx}$ är parvis ortogonala i $L^2(\mathbb{R})$. Bestäm talen c_n så att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=-N}^{N} c_n \varphi_n(x) \right|^2 dx$$

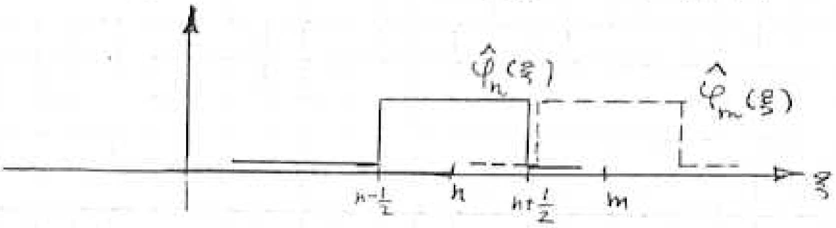
minimeras.

<u>Lösning.</u> $\frac{\sin ax}{x} \overset{\mathcal{F}}{\supset} \pi \chi_a(\xi) \overset{a=\frac12}{\Longrightarrow} \frac{\sin x/2}{\pi x} \supset \chi_{\frac12}(\xi) = \begin{cases} 1 & -\frac12<\xi<\frac12 \\ 0 & |\xi|>\frac12 \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi_n(x) = \frac{\sin x/2}{\pi x} e^{inx} \overset{\mathcal{F}}{\supset} \chi_{\frac12}(\xi - n) = \begin{cases} 1, & -\frac12 < \xi - n < \frac12 \Leftrightarrow n-\frac12 < \xi < n+\frac12 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

Då är alltså

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_n(\xi)\, \overline{\hat{\varphi}_m(\xi)}\, d\xi = \begin{cases} 1 & \text{för} \quad m = n \\ 0 & \text{"} \quad m \neq n \end{cases}$$



Enligt Plancherel formel är

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\overline{\varphi_m(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_n(\xi)\overline{\hat{\varphi}_m(\xi)}\, d\xi = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{för } m=n \\ 0 & \text{för } m \neq n \end{cases}$$

Alltså är $\{\varphi_n\}_{-\infty}^{\infty}$ en ortogonalmängd. Låt $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} c_n \varphi_n(x) \right|^2 dx \qquad \left(\overset{(*)}{\Rightarrow} \hat{f}_1(\xi) = \pi e^{-|\xi|}\right)$$

blir minimal om och endast om $c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \langle f, \varphi_n \rangle = 2\pi \langle f, \varphi_n \rangle$

$= \langle \hat{f}, \hat{\varphi}_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{\varphi}_n(\xi)}\, d\xi = \int_{n-\frac12}^{n+\frac12} \hat{f}(\xi)\, d\xi \overset{(*)}{=} \int_{n-\frac12}^{n+\frac12} \pi e^{-|\xi|}\, d\xi$

<u>Fall 1</u>, $n \geq 1$. Då är $n - \frac12 > 0$ & $c_n = \int_{n-\frac12}^{n+\frac12} \pi e^{-\xi} d\xi = \pi\left[-e^{-\xi}\right]_{n-\frac12}^{n+\frac12}$

$= \pi\left(e^{-n+\frac12} - e^{-n-\frac12}\right) = \underline{\underline{\pi e^{-n}\left(e^{\frac12} - e^{-\frac12}\right)}}$

<u>Fall 2:</u> $n \leq -1$, Då är $n + \frac12 < 0$ & $c_n = \int_{n-\frac12}^{n+\frac12} \pi e^{\xi} d\xi = \pi\left[e^{n+\frac12} - e^{n-\frac12}\right]$

$= \underline{\underline{\pi e^{n}\left(e^{\frac12} - e^{-\frac12}\right)}}$.

Fall 3: $n = 0$, Då $c_0 = \int_{-\frac12}^{\frac12} \pi e^{-|\xi|} d\xi = 2\int_0^{\frac12} \pi e^{-\xi} d\xi = 2\pi\left(1 - e^{-1/2}\right)$

Alltså $c_n = \begin{cases} \pi\left(e^{\frac12} - e^{-\frac12}\right) e^{-|n|} & \text{för } n \neq 0 \\ 2\pi\left(1 - e^{-\frac12}\right) & \text{för } n = 0. \end{cases}$ ▨

22. Bestäm den lösning $y(x)$ till $y''-y=0$ som minimerar

$$\int_{-1}^{1}[1+x-y(x)]^2dx.$$

Lösning: $y''-y=0$ har allmänna lösningen $y(x)=C_1\cosh(x)+C_2\sinh(x)$.
Eftersom $\int_{-1}^{1}\cosh(x)\sinh(x)\,dx=0$, (udda fkt symm. intervall), är $\varphi_1(x)=\cosh(x)$ och $\varphi_2(x)=\sinh(x)$ en ortogonalbas för lösningsrummet betraktat som underrum av $L_2(-1,1)$.
Alltså är $\int_{-1}^{1}[(1+x)-(C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x))]^2dx$ så litet som möjligt då

$$C_k=\frac{1}{\|\varphi_k\|^2}(1+x,\varphi_k),\quad k=1,2.$$

$$\|\varphi_1\|^2=\int_{-1}^{1}\cosh^2(x)\,dx=2\int_0^1\frac{1+\cosh(2x)}{2}dx=\left[x+\tfrac{1}{2}\sinh(2x)\right]_0^1=1+\tfrac{1}{2}\sinh(2)$$

$$\|\varphi_2\|^2=\int_{-1}^{1}\sinh^2(x)\,dx=2\int_0^1\frac{\cosh(2x)-1}{2}dx=\left[\tfrac{1}{2}\sinh(2x)-x\right]_0^1=\tfrac{1}{2}\sinh(2)-1$$

$$\int_{-1}^{1}(1+x)\cosh x\,dx=2\int_0^1\cosh(x)=2\left[\sinh(x)\right]_0^1=2\sinh(1)$$

$$\int_{-1}^{1}(1+x)\sinh(x)dx=2\int_0^1 x\sinh(x)dx=2\left[x\cosh(x)\Big|_0^1-\int_0^1 1\cdot\cosh(x)\,dx\right]$$

$$=2\cosh 1-2\left[\sinh(x)\right]_0^1=2(\cosh 1-\sinh 1)=2e^{-1}$$

$$\underline{\underline{y(x)=\frac{2\sinh(1)}{\frac{1}{2}\sinh(2)+1}\cosh(x)+\frac{2e^{-1}}{\frac{1}{2}\sinh(2)-1}\sinh(x).}}$$

23. Bestäm samtliga egenvärden och tillhörande egenfunktioner till Sturm-Liouville-problemet

$$\begin{cases} f'' + \lambda f = 0 & 0<x<a \\ f(0) - f'(0) = 0, & f(a) + 2f'(a) = 0. \end{cases}$$

Lösning:

$\lambda = 0$: $f''=0$, $f(x) = c_1 x + c_2$; $f(0) - f'(0) = c_2 - c_1 = 0$, $c_2 = c_1$.

$f(a) + 2f'(a) = c_1 a + c_2 + 2c_2 = (a+3)c_1 = 0$, $c_1 = c_2 = 0$; $\lambda = 0$ ej egenvärde.

$\lambda \neq 0$: Sätt $\lambda = \nu^2$, där $\nu = \sqrt{\lambda} > 0$ om $\lambda > 0$ och $\nu = i\sqrt{-\lambda} = i\mu$, $\mu > 0$, om $\lambda < 0$, $f(x) = c_1 \cos \nu x + c_2 \sin \nu x$, $f'(x) = \nu(c_2 \cos \nu x - c_1 \sin \nu x)$

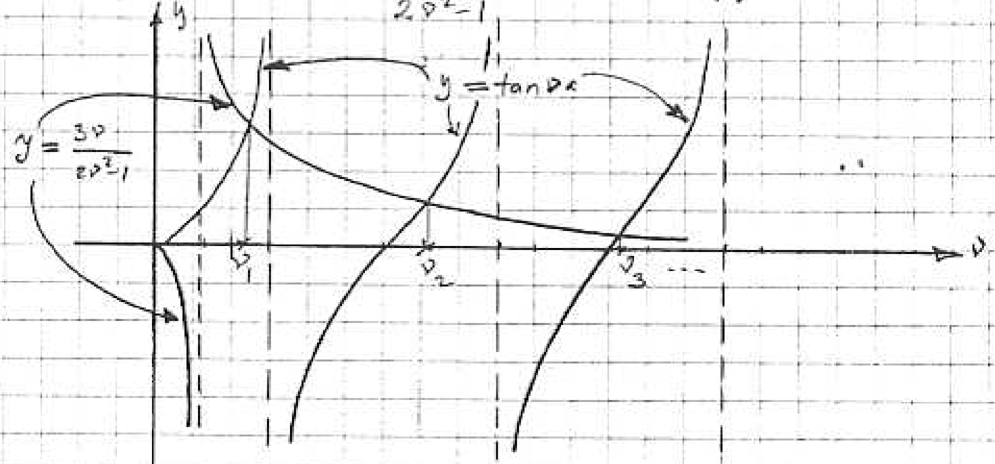
$f(0) - f'(0) = c_1 - \nu c_2 = 0$, $\quad c_1 = \nu c_2$

$f(a) + 2f'(a) = c_1 \cos \nu a + c_2 \sin \nu a + 2\nu(c_2 \cos \nu a - c_1 \sin \nu a)$

$= 3\nu c_2 \cos(\nu a) + (1 - 2\nu^2) c_2 \sin(\nu a) = 0$, $\quad c_2 = 0 \Rightarrow$

$3\nu \cos \nu a = (2\nu^2 - 1) \sin \nu a$, $\quad \tan \nu a = \dfrac{3\nu}{2\nu^2 - 1}$.

För $\nu > 0$, låt $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$, vara de positiva rötterna till ekvationen $\tan \nu a = \dfrac{3\nu}{2\nu^2-1}$; se fig.



Om $\nu = i\mu$ fås ekv. $i \tanh(\mu a) = \dfrac{3i\mu}{-2\mu^2 - 1}$, $\tanh \mu a = -\dfrac{3\mu}{2\mu^2+1}$ som saknar rötter $\mu > 0$ (V.L. > 0, H.L. < 0).

Egenvärdena är alltså ν_k^2, där ν_k är de positiva rötterna till $\tan \nu a = \dfrac{3\nu}{2\nu^2-1}$, och egenfunktionerna är $f_k(x) = \nu_k \cos \nu_k x + \sin \nu_k x$.

24. Bestäm samtliga egenvärden och egenfunktioner till Sturm-Liouville-problemet

$$\text{(DE)}\begin{cases} -e^{-4x}\dfrac{d}{dx}\left(e^{4x}\dfrac{du}{dx}\right)=\lambda u, & 0<x<1 \\ u(0)=0,\ u'(1)=0. \end{cases}$$

Utveckla funktionen e^{-2x} i Fourierserie m.a.p. egenfunktionerna.

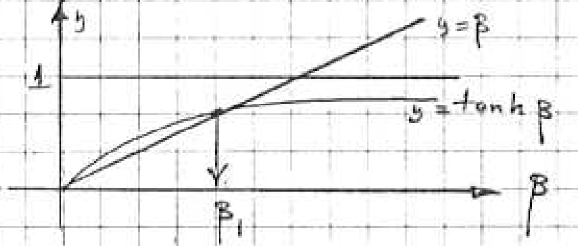
Lösning: (DE) $\Rightarrow$ $u''+4u'+\lambda u=0$, kar. ekv. $r^2+4r+\lambda=0$,

$r_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-\lambda}$.

Fall I. $\lambda<4$, sätt $\beta=\sqrt{4-\lambda}$. Allm. lösn. $u=e^{-2x}(c_1\cosh\beta x+c_2\sinh\beta x)$

$u(0)=c_1=0$, $u'(1)=c_2e^{-2}\beta\cosh\beta-2e^{-2}c_2\sinh\beta=0$, $c_2\neq0\Rightarrow$

$\tanh\beta=\frac{\beta}{2}$. Denna ekv. har exakt en rot $\beta_1>0$, se fig.



egenvärde: $\lambda_1=4-\beta_1^2$

egenfunktion: $u_1(x)=e^{-2x}\sinh\beta_1x$

Fall II: $\lambda=4$; $u=(c_1+c_2x)e^{-2x}$, $u(0)=c_1=0$, $u'(1)=c_2(e^{-2}-2e^{-2})=0$

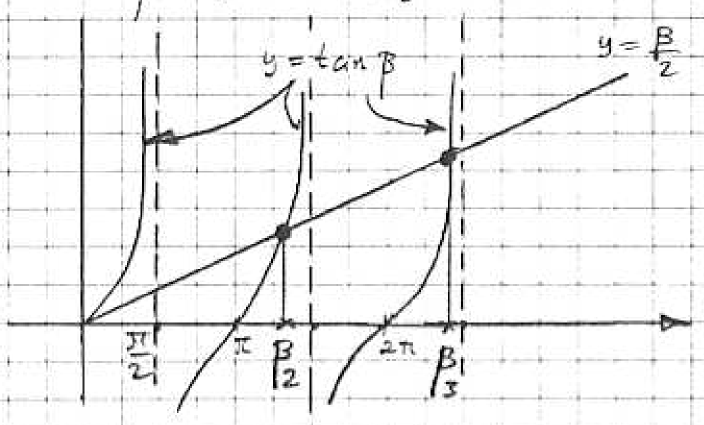
$c_2=0$ inget egenvärde.

Fall III. $\lambda>4$ sätt $\beta=\sqrt{\lambda-4}$ (>0). Allm. lösn $u=e^{-2x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

$u(0)=c_1=0$, $u'(1)=c_2(e^{-2}\beta\cos\beta x-2e^{-2}\sin\beta)=0$, $c_2\neq0\Rightarrow$

$\tan\beta=\frac{\beta}{2}$. Låt $\beta_2,\beta_3,\dots$, vara de positiva rötterna till ekv

$\tan\beta=\frac{\beta}{2}$, se fig.



Obs! $\beta>0$

Egenvärden $\lambda_n=4+\beta_n^2$

egenfunktioner $u_n(x)=e^{-2x}\sin\beta_nx$

$n\geq2$.

(β_1, λ_1 o u_1 redan bestämda i Fall I)

→

$\overleftarrow{24}$ $\overleftarrow{\text{forts.}}$ Eö-24

Egenfunktionerna $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ utgör ett fullständigt OG system på intervallet $(0,1)$, med viktfunktionen $w(x)=e^{4x}$. Utveckla $f(x)$ i u_n:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x) \quad \text{där} \quad c_n=\frac{1}{\rho_n}\int_0^1 f(x)\,u_n(x)e^{4x}\,dx,\quad \rho_n=\int_0^1 u_n^2(x)e^{4x}\,dx$$

$$\underline{\underline{\rho_1}}=\int_0^1 \sinh^2(\beta_1 x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{2}\left(\cosh 2\beta_1 x-1\right)dx=\frac{1}{4\beta_1}\sinh 2\beta_1-\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{4\beta_1}\cdot\frac{2\sinh\beta_1\cosh\beta_1}{\cosh^2\beta_1-\sinh^2\beta_1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2\beta_1}\frac{\tanh\beta_1}{1-\tanh^2\beta_1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2\beta_1}\frac{\beta_1/2}{1-\beta_1^2/4}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{4-\beta_1^2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{2}=\underline{\underline{\frac{2-\lambda_1}{2\lambda_1}}}.$$

För $n\geq 2$ är $\underline{\underline{\rho_n}}=\int_0^1 \sin^2\beta_n x\,dx=\int_0^1\frac{1}{2}(1-\cos 2\beta_n x)\,dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{4\beta_n}\sin 2\beta_n$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4\beta_n}\frac{2\sin\beta_n\cos\beta_n}{\cos^2\beta_n+\sin^2\beta_n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\beta_n}\frac{\tan\beta_n}{1+\tan^2\beta_n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\beta_n}\cdot\frac{\beta_n/2}{1+\beta_n^2/4}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4+\beta_n^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\lambda_n}=\underline{\underline{\frac{\lambda_n-2}{2\lambda_n}}}.$$

Sätt $f(x)=e^{-2x}\Rightarrow \rho_1 c_1=\int_0^1\underbrace{\sinh\beta_1 x}_{f(x)\,u_1(x)\,w(x)}\,dx=\frac{1}{\beta_1}(\cosh\beta_1-1)$

$$\cosh^2\beta_1=\frac{\cosh^2\beta_1}{\cosh^2\beta_1-\sinh^2\beta_1}=\frac{1}{1-\tanh^2\beta_1}=\frac{1}{1-\beta_1^2/4}=\frac{4}{4-\beta_1^2}=\frac{4}{\lambda_1}\Rightarrow\cosh\beta_1=\frac{2}{\sqrt{\lambda_1}}$$

(–? olöslig)

$$\Rightarrow\rho_1 c_1=\frac{1}{\beta_1}\left(\frac{2}{\sqrt{\lambda_1}}-1\right)=\frac{2-\sqrt{\lambda_1}}{\beta_1\sqrt{\lambda_1}}\Rightarrow c_1=\frac{2-\sqrt{\lambda_1}}{\beta_1\sqrt{\lambda_1}}\cdot\frac{2\lambda_1}{2-\lambda_1}=\underline{\underline{\frac{2\sqrt{\lambda_1}\,(2-\sqrt{\lambda_1})}{\beta_1(2-\lambda_1)}}}$$

$$n\geq 2:\ \rho_n c_n=\int_0^1\underbrace{\sin\beta_n x}_{f(x)\,u_n(x)e^{4x}}\,dx=\frac{1}{\beta_n}(1-\cos\beta_n).$$

$$\cos^2\beta_n=\frac{1}{1+\tan^2\beta_n}=\frac{1}{1+\beta_n^2/4}=\frac{4}{4+\beta_n^2}=\frac{4}{\lambda_n}\Rightarrow\cos\beta_n=\pm\frac{2}{\sqrt{\lambda_n}}=(-1)^{n-1}\frac{2}{\sqrt{\lambda_n}}$$

[OBS: $\cos\beta_2<0$ .. (se fig! & alternera)]

$$\rho_n c_n=\frac{1}{\beta_n}\left(1-(-1)^{n-1}\frac{2}{\sqrt{\lambda_n}}\right)=\frac{\sqrt{\lambda_n}+2(-1)^n}{\beta_n\sqrt{\lambda_n}}\Rightarrow$$

$$c_n=\frac{[\sqrt{\lambda_n}+2(-1)^n](2\lambda_n)}{\beta_n\sqrt{\lambda_n}(\lambda_n-2)}=\frac{2\sqrt{\lambda_n}[\sqrt{\lambda_n}+2(-1)^n]}{\beta_n(\lambda_n-2)}.$$

Observera att samma formel gäller för $n=1$ & ger c_1 "as well".

$$\underline{\underline{e^{-2x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{\lambda_n}[\sqrt{\lambda_n}+2(-1)^n]}{\beta_n(\lambda_n-2)}\,u_n(x).}}$$

25. Lös problemet
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=y, & 0<x<2,\ 0<y<1 \\ u(x,0)=0, & u(x,1)=0 \\ u(0,y)=y-y^3, & u(2,y)=0 \end{cases} \quad \text{(BV)}$$

Lösning [Se också föreläsning anteckn. om homogenisering]:

Bestäm $w(y)$ så att $w''(y)=y$, $w(0)=w(1)=0$. $w'(y)=\frac{1}{2}y^2+A$

$w(y)=\frac{1}{6}y^3+Ay+B$, $w(0)=0 \Rightarrow B=0$, $w(1)=0 \Rightarrow \frac{1}{6}+A=0 \Rightarrow A=-\frac{1}{6}$.

Man får $w(y)=\frac{1}{6}(y^3-y)$.

Sätt $v(x,y)=u(x,y)-w(y)$. Då satisfierar v

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \\ v(x,0)=v(x,1)=0 \\ v(0,y)=u(0,y)-w(y)=y-y^3-\frac{1}{6}(y^3-y)=\frac{7}{6}(y-y^3) \\ v(2,y)=u(2,y)-w(y)=\frac{1}{6}(y-y^3). \end{cases}$$

Använd variabelseparation $v(x,y)=X(x)Y(y)\neq 0$ (så att de homogena villkoren uppfylls)

$\Rightarrow X''Y+XY''=0$; $\dfrac{X''}{X}=-\dfrac{Y''}{Y}=\lambda \Rightarrow$ (I) $\begin{cases}-Y''=\lambda Y \\ Y(0)=Y(1)=0\end{cases}$ (II) $X''=\lambda X$

S-L-problemet (I) har lösn. $\underline{\underline{\lambda=\lambda_n=(n\pi)^2}}$, $\underline{\underline{Y=Y_n(y)=\sin n\pi y}}$, $n\geq 1$.

Allmänna lösn. till (II) med $\lambda=\lambda_n$ kan skrivas, $X_n(x)=A_n\sinh n\pi x+B_n\sinh n\pi(2-x)$.

Ansätt totallösningen $v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\sinh n\pi x+B_n\sinh n\pi(2-x)\right]\sin n\pi y$.

Vi vill ha: $v(0,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh 2n\pi\cdot\sin n\pi y=\frac{7}{6}(y-y^3)$.

$v(2,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh 2n\pi\cdot\sin n\pi y=\frac{1}{6}(y-y^3)$.

Utveckla $\frac{1}{6}(y-y^3)$ i Fourierserie m.a.p. det fullständiga ON-system $\{\sin n\pi y\}_{n=1}^{\infty}$:

$\frac{1}{6}(y-y^3)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin n\pi y$, där $C_n=\frac{1}{1/2}\int_0^1\frac{1}{6}(y-y^3)\sin n\pi y\,dy$. Då får vi

$A_n\sinh 2n\pi=C_n$ och $B_n=7A_n$.

$C_n=\frac{1}{3}\left[(y-y^3)\cdot\frac{-\cos n\pi y}{n\pi}\right]_0^1+\frac{1}{3}\int_0^1(1-3y^2)\frac{\cos n\pi y}{n\pi}dy=\frac{1}{3}\left[(1-3y^2)\cancel{\frac{\sin n\pi y}{(n\pi)^2}}\right]_0^1-$

$-\frac{1}{3}\int_0^1(-6y)\frac{\sin n\pi y}{(n\pi)^2}dy=-2\left[y\frac{\cos n\pi y}{(n\pi)^3}\right]_0^1+2\int_0^1\cancel{\frac{\cos n\pi y}{(n\pi)^3}}dy=\frac{-2\cos n\pi}{(n\pi)^3}=\frac{2(-1)^{n-1}}{(n\pi)^3}$.

$A_n=\dfrac{2(-1)^{n-1}}{(n\pi)^3\sinh(2n\pi)}$, $B_n=\dfrac{14(-1)^{n-1}}{(n\pi)^3\sinh(2n\pi)}$

$$\underline{\underline{u(x,y)=\frac{1}{6}(y^3-y)+\frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\sinh 2n\pi}\left[\sinh n\pi x+7\sinh n\pi(2-x)\right]\sin n\pi y.}}$$

Alternativ EÖ-25 Via Multiple F-serie

25. Alternativ genom F-serie i produkt form: (BV) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=y & 0<x<2,\ 0<y<1 \\ u(x,0)=u(x,1)=0 \\ u(0,y)=y-y^3, & u(2,y)=0 \end{cases}$

Lösning: Sätt $v(x,y)=u(x,y)-\varphi(x,y)$ så att φ polynom i x & y med

$\varphi_{xx}=0$ & $\varphi_{yy}=Ay+B$ och φ satisf. (BV) $\Rightarrow \varphi(x,y)=(ax+b)(py^3+qy^2+ry+s)$

$\varphi(x,0)=(ax+b)s=0 \quad \forall x \Rightarrow \underline{s=0}$, $\varphi(x,1)=(ax+b)(p+q+r)=0,\ \forall x \Rightarrow \underline{\underline{p+q+r=0}}$

$\varphi(0,y)=b(py^3+qy^2+ry)=y-y^3 \Rightarrow p=-\frac{1}{b},\ q=0,\ r=\frac{1}{b}$

$\varphi(2,y)=(2a+b)(-\frac{1}{b}y^3+\frac{1}{b}y)=(\frac{2a}{b}+1)(-y^3+y)=0 \overset{\forall y}{\Longrightarrow} b=-2a$

Alltså $\varphi(x,y)=(ax+b)(py^3+\overset{=0}{qy^2}+ry+\overset{=0}{s})=\underset{-2a}{\frac{1}{b}}(ax-2a)(-y^3+y)=\underline{\underline{\frac{1}{2}(2-x)(y-y^3)}}$

$v_{xx}+v_{yy}=u_{xx}+u_{yy}-(\varphi_{xx}+\varphi_{yy})=y-(0+\frac{1}{2}(2-x)(-6y))=y-\frac{1}{2}(2-x)(-6y)=\underline{\underline{7y-3xy}}$

Ekv. för $v(x,y)$:

$\boxed{\text{Jfr. med Multiple F-serie Folland s.d. 125, } \ell_1=2,\ \ell_2=1}$ $\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=7y-3xy=y(7-3x) \\ v(x,0)=v(1,0)=0 \\ v(0,y)=v(2,y)=0 \end{cases}$

Var. Sep. $\Rightarrow v(x,y)=X(x)Y(y)\neq 0$ för homogen ekv. gäller $\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\lambda$

(X) $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_m=\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2,\quad X_m(x)=\sin\frac{m\pi}{2}x,\quad m\geq 1$

(Y) $\begin{cases} Y''-\lambda Y=0 \\ Y(0)=Y(1)=1 \end{cases} \overset{???}{\Longrightarrow} Y_n(y)=a_n\sin n\pi y,\quad n\geq 1$

Teknik II, Homogen BV $\Rightarrow$ Använd multip. Fourier sinus serie ist:

$v(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{2}\sin n\pi y \Rightarrow$

$v_{xx}+v_{yy}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{a_{mn}\left(-\frac{m^2\pi^2}{4}-n^2\pi^2\right)}_{!=d_{mn}}\sin\frac{m\pi x}{2}\sin n\pi y=y(7-3x).$

Alltså d_{mn} är F-sinus koeff. för $y(7-3x)$ m.a.p. multiple bas $\sin\frac{m\pi}{2}x\sin n\pi y$

dvs. $d_{mn}=\frac{4}{1\times 2}\int_0^1 y\sin n\pi y\,dy\int_0^2(7-3x)\sin\frac{m\pi x}{2}\,dx=$

$2\left[y\frac{-\cos n\pi y}{n\pi}\Big|_0^1-\int_0^1\overset{=0}{\frac{-\cos n\pi y}{n\pi}dy}\right]\cdot\left[(7-3x)\frac{-2}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2-\overset{0}{\cancel{\int_0^2(-3)\frac{-2}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{2}dx}}\right]$

$=-\frac{2}{n\pi}\cos n\pi\cdot\frac{-2}{m\pi}\left((7-3(2))\cos m\pi-7\right)=\frac{4(-1)^n}{nm\pi^2}\left((-1)^m-7\right)\equiv a_{mn}\left(-\frac{m^2\pi^2}{4}-n^2\pi^2\right)$

$\Rightarrow a_{mn}=\frac{4(-1)^n(7-(-1)^m)}{nm\left(\frac{m^2}{4}+n^2\right)\pi^4}$, $v(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{2}\sin n\pi y$ &

$\underline{\underline{u(x,y)=\frac{1}{2}(2-x)(y-y^3)+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{2}\sin n\pi y}}.$

26. Lös problemet

$$\begin{cases} \sqrt{1+t}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, & 0<x<1,\ t>0 \iff u''_{xx} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}u'_t \\ u(0,t)=1, & u(1,t)=0 \\ u(x,0) = 1-x^2. \end{cases}$$

Lösning. OBS! inhomogen randdata. Välj $S(x)$ polynom i x så att: $S''(x)=0$ & S satisf. rand-data i x-led: $S(0)=1$ & $S(1)=0$:

$S(x) = Ax+B$, $S(0)=1 \Rightarrow \underline{B=1}$, $S(1)=0 \Rightarrow A+B=0 \Rightarrow \underline{A=-B=-1}$

$\therefore\ \underline{\underline{S(x) = 1-x}}$.

Sätt $v(x,t) = u(x,t) - S(x)$. Då satisf. v ekv. + randdata:

$$\begin{cases} v_{xx} = u_{xx} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}u_t = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}v_t & (DE)_v \\ v(0,t) = u(0,t) - S(0) = 1-1 = 0 \\ v(1,t) = u(1,t) - S(1) = 0-0 = 0 \\ v(x,0) = u(x,0) - S(x) = 1-x^2-(1-x) = x-x^2 = x(1-x). \end{cases}$$

Var. sep. $V(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$, i $(DE)_v \Rightarrow X''T = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}XT' \Rightarrow$

$\dfrac{X''}{X} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\dfrac{T'}{T} = \lambda \overset{\vee}{<} 0$; $\begin{cases} X'' = \lambda X \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{cases} \lambda_n = -(n\pi)^2 \\ X_n(x) = \sin n\pi x,\ n\geq 1 \end{cases}}}$

$\dfrac{T'}{T} = \sqrt{1+t}\,\lambda \Rightarrow \ln T = \lambda\int\sqrt{1+t}\,dt + \ln C \Rightarrow \ln\dfrac{T}{C} = \dfrac{2}{3}(1+t)^{3/2}\lambda$

$T(t) = C e^{\frac{2}{3}\lambda(1+t)^{3/2}}$

$\Rightarrow \{\lambda = -(n\pi)^2\} \Rightarrow \underline{\underline{T_n(t) = C_n e^{-\frac{2}{3}\pi^2 n^2 (1+t)^{3/2}}}}.$

Superposition: $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{2}{3}\lambda(1+t)^{3/2}} \sin n\pi x$.

$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-2/3\lambda} \sin n\pi x = x(1-x) \Rightarrow d_n := C_n e^{-\frac{2}{3}\lambda}$ är F-koeff. av $x(1-x)$ i OG system $\{\sin n\pi x\}_1^{\infty} \Rightarrow d_n = \dfrac{1}{1/2}\int_0^1 x(1-x)\sin(n\pi x)\,dx$

$= 2\left\{ \cancel{x(1-x)\dfrac{-\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1} + \int_0^1 (1-2x)\dfrac{\cos n\pi x}{n\pi}\,dx \right\} = 2\left\{ \cancel{(1-2x)\dfrac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\Big|_0^1} - \int_0^1 (-2)\dfrac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2} \right\}$

$= 4\,\dfrac{-\cos(n\pi x)}{(n\pi)^3}\Big|_0^1 = \dfrac{4}{(n\pi)^3}(1-\cos(n\pi)) = \left.\begin{cases} \dfrac{8}{\pi^3(2k+1)^3} & n = 2k+1 \\ 0 & n = 2k \end{cases}\right\} = d_n$

$C_n = e^{2/3\lambda} d_n \Rightarrow v(x,t) = \dfrac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^3} e^{-2/3\lambda[(1+t)^{3/2}-1]} \sin(2k+1)\pi x$

$$u(x,t) = S(x) + V(x,t) = 1-x+\frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3} e^{-\frac{2}{3}(2k+1)^2\pi^2[(1+t)^{3/2}-1]} \sin(2k+1)\pi x$$

27. Lös problemet $\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} + 20u = 0, & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ u(0,y) = u(1,y) = 0 \\ u(x,0) = 0, & u(x,1) = x^2 - x \end{cases}$

Lösning. Bestäm $u(x,y) = X(x)Y(y) \neq 0$ så att diff.ekv. och homogena randvillkoren uppfylls.

$X''Y + XY'' + 20XY = 0, \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + 20 = 0, \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - 20 = \lambda$

(I) $\begin{cases} X'' = \lambda X \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} Y'' = -(20+\lambda)Y \\ Y(0) = 0 \end{cases}$

Egenvärdesproblemet (I) har lösningarna $\lambda = \lambda_n = -(n\pi)^2$,

$\underline{\underline{X = X_n(x) = \sin n\pi x}}, \quad n = 1, 2, \dots$

(II) blir $Y'' = \left((n\pi)^2 - 20\right)Y$, $\pi^2 - 20 < 0$, medan $(n\pi)^2 - 20 > 0$, för $n \geq 2$

För $n=1$ fås ekv. $Y_1'' = -\beta_1^2 Y_1$, där $\beta_1 = \sqrt{20 - \pi^2}$

$Y_1 = A_1 \cos\beta_1 y + B_1 \sin\beta_1 y, \quad Y_1(0) = A_1 = 0, \quad \underline{\underline{Y_1(y) = B_1 \sin\beta_1 y}}.$

För $n \geq 2$ fås ekv. $Y_n'' = \beta_n^2 Y_n$ där $\beta_n = \sqrt{(n\pi)^2 - 20}$

$Y_n = A_n \cosh(\beta_n y) + B_n \sinh(\beta_n y), \quad Y_n(0) = A_n = 0, \quad \underline{\underline{Y_n(y) = B_n \sinh\beta_n y}}$

Ansats $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) = B_1 \sin\pi x \cdot \sin\beta_1 y + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \sin n\pi x \sinh\beta_n y$,

och bestäm B_n så att $u(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(1) X_n(x) = x^2 - x$.

$\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ är ett fullständigt OG-system på $(0,1)$ med

$M_n = \int_0^1 X_n^2(x)\,dx = \int_0^1 \sin^2 n\pi x\,dx = \frac{1}{2}$. Fourierkoeff. till (x^2-x) blir då

$$Y_n(1) = \frac{1}{M_n}\int_0^1 (x^2-x) X_n(x)\,dx = 2\int_0^1 (x^2-x)\sin n\pi x\,dx = 2\left[\cancel{(x^2-x)}\,\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 +$$

$$+ 2\int_0^1 (2x-1)\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\,dx = 2\left[(2x-1)\frac{\cancel{\sin n\pi x}}{(n\pi)^2}\right]_0^1 - 2\int_0^1 2\,\frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\,dx =$$

$$= 4\left[\frac{\cos n\pi x}{(n\pi)^3}\right]_0^1 = 4\,\frac{\cos n\pi - 1}{(n\pi)^3} = 4\,\frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^3}; \quad B_1 \sinh\beta_1 = \frac{-8}{\pi^3}, \quad \underline{\underline{B_1 = -\frac{8}{\pi^3 \sinh\beta_1}}}$$

För $n \geq 2$: $B_n \sinh\beta_n = Y_n(1) = 4\,\frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^3} \Rightarrow$ $B_{2k} = 0$ för $k = 0, 1, 2, \dots$

$B_{2k+1} = -\frac{8}{(2k+1)^3 \pi^3 \sinh\beta_{2k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots$

$$\underline{\underline{u(x,y) = \frac{-8}{\pi^3}\sin\pi x\,\frac{\sin(\sqrt{20-\pi^2}\,y)}{\sin\sqrt{20-\pi^2}} - \frac{8}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)^3}\,\frac{\sinh\left(\sqrt{(2k+1)^2\pi^2 - 20}\;y\right)}{\sinh\sqrt{(2k+1)^2\pi^2 - 20}}}}.$$

28. Lös problemet $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t \sin x, & 0<x<1,\ t>0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin 2\pi x \end{cases}$

Lösning: Motsv. homogen St-L-problem gr ODE i x:

$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$ med lösningarna $\lambda_n = -(n\pi)^2$, $X_n(x) = \sin n\pi x$, $n \geq 1$.

Ansatt $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin n\pi x \ \wedge \ t \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} t\, b_n \sin n\pi x$

$$\underline{\underline{b_n}} = \frac{1}{1/2}\int_0^1 \sin x \sin n\pi x = 2\int_0^1 \left(\cos(1-n\pi)x - \cos(1+n\pi)x\right)dx$$

$$= \frac{\sin(1-n\pi)}{1-n\pi} - \frac{\sin(1+n\pi)}{1+n\pi} = \frac{(-1)^n \sin 1}{1-n\pi} - \frac{(-1)^n \sin 1}{1+n\pi} = \underline{\underline{(-1)^n \sin 1 \frac{2n\pi}{1-n^2\pi^2}}}$$

$$(DE) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n'(t) + (n\pi)^2 B_n(t)\right)\sin n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} t\, b_n \sin n\pi x$$

identif. koeff. $\Rightarrow$ $B_n'(t) + (n\pi)^2 B_n(t) = t b_n$; I.F. $= e^{(n\pi)^2 t}$

$$e^{(n\pi)^2 t} B_n'(t) + (n\pi)^2 e^{(n\pi)^2 t} B_n(t) = e^{(n\pi)^2 t}\, t\, b_n$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{(n\pi)^2 t} B_n(t)\right) = e^{(n\pi)^2 t}\, t\, b_n$$

$$e^{(n\pi)^2 t} B_n(t) = b_n \int t e^{(n\pi)^2 t} dt = b_n\left(t\frac{e^{(n\pi)^2 t}}{(n\pi)^2} - \int \frac{e^{(n\pi)^2 t}}{(n\pi)^2}dt\right) + C_n$$

$$= b_n t \frac{e^{(n\pi)^2 t}}{(n\pi)^2} - b_n \frac{e^{(n\pi)^2 t}}{(n\pi)^4} + C_n \Rightarrow$$

$$B_n(t) = C_n e^{-(n\pi)^2 t} + \frac{1}{(n\pi)^2} b_n t - \frac{1}{(n\pi)^4} b_n$$

$$u(x,0) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n - \frac{1}{(n\pi)^4} b_n\right)\sin(n\pi x) = \sin 2\pi x$$

$$C_2 - \frac{1}{(2\pi)^4} b_2 = 1 \ \wedge \ C_n = \frac{1}{(n\pi)^4} b_n, \ n \neq 2$$

$$C_2 = 1 + \frac{1}{(2\pi)^4} b_2 \Rightarrow B_2 = \underset{\sim\sim\sim}{e^{-4\pi^2 t}} + \underline{\left[\frac{1}{(2\pi)^4} e^{-(2\pi)^2 t} + \frac{1}{(2\pi)^2} t - \frac{1}{(2\pi)^4}\right] b_2}$$

$$B_n(t) = \underline{\left[\frac{1}{(n\pi)^4} e^{-(n\pi)^2 t} + \frac{1}{(n\pi)^2} t - \frac{1}{(n\pi)^4}\right] b_n}$$

OBS! ger även [..]-termen för $n=2$.

$$\underline{\underline{u(x,t) = \underset{\sim\sim\sim}{e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x} + 2\pi \sin(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2\pi^2 - 1}\left[\frac{t}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^4\pi^4}\left(1 - e^{-n^2\pi^2 t}\right)\right]\sin n\pi x}}$$

29. Lös problemet
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<1, \quad t>0 \\ u(0,t) = t+1, & u(1,t) = 0, \quad t>0 \\ u(x,0) = 1-x, & 0<x<1. \end{cases}$$

Lösning: Tag en funktion $\tilde{u}(x,t)$ som uppfyller randvillkoren t.ex. $\tilde{u}(x,t) = (t+1)(1-x)$. Sätt $v = u - \tilde{u}$; då satisfierar v

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}\right) = 0 - (1-x) - 2\cdot 0 = x-1. \\ v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = 1-x-(1-x) = 0. \end{cases}$$

Variabelseparation i motsvarande homogena ekv. ger egenvärdesproblemets

$X''(x) = -\lambda X(x)$, $X(0) = X(1) = 0$, med lösningar $\lambda_n = (n\pi)^2$, $X_n(x) = \sin(n\pi x)$, $n \geq 1$.

Utveckla högerledet i Fourierserie m.a.p. dessa egenfunktioner,

$x-1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x)$, och ansätt $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\sin(n\pi x)$.

Vi får $c_n = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^1 (x-1)X_n(x)\,dx = \frac{1}{1/2}\int_0^1 (x-1)\sin n\pi x\,dx = 2\left[(x-1)\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right]_0^1$
$+2\int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{n\pi}\,dx = -\frac{2}{n\pi} + 2\left[\frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\right]_0^1 = -\frac{2}{n\pi}.$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[v_n'(t) + 2(n\pi)^2 v_n(t)\right]\sin n\pi x = x-1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n\pi}\sin n\pi x \\ v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(0)\sin n\pi x = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_n'(t) + 2n^2\pi^2 v_n(t) \overset{(*)}{=} -\frac{2}{n\pi}, \\ v_n(0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow v_n(t) = \frac{1}{n^3\pi^3}\left(e^{-2n^2\pi^2 t} - 1\right)$

$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\pi^3}\left(e^{-2n^2\pi^2 t} - 1\right)\sin n\pi x$

I.F. $= e^{2n^2\pi^2 t} \xRightarrow{\cdot(*)}$

$\frac{d}{dt}\left(e^{2n^2\pi^2 t}v_n(t)\right) = -\frac{2}{n\pi}e^{2n^2\pi^2 t}$

Byt t mot s & $\int_0^t$ fås

$e^{2n^2\pi^2 t}v_n(t) - v_n(0) = -\frac{1}{n^3\pi^3}e^{2n^2\pi^2 t} + \frac{1}{n^3\pi^3}$

$$\underline{\underline{u(x,t) = (t+1)(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\pi^3}\left(e^{-2n^2\pi^2 t} - 1\right)\sin n\pi x}}$$

30. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i området $0<\theta<\frac{\pi}{4}$, $1<r<2$, (polära koordinater i planet) med randvillkoren

$$\begin{cases} u=0 \text{ för } r=1, & u'_r=0 \text{ för } r=2 \\ u=0 \text{ för } \theta=0, & u=r-1 \text{ för } \theta=\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

dvs lös:
$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, & 1<r<2,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4} \\ u(1,\theta)=0, & \frac{\partial u}{\partial r}(2,\theta)=0 \\ u(r,0)=0, & u(r,\frac{\pi}{4})=r-1 \end{cases}$$

Lösning: Var sep. $u=R(r)\Theta(\theta)$ ger $\frac{1}{r}(rR')'\Theta+\frac{1}{r^2}R\Theta''=0$,

$$-\frac{r(rR')'}{R}=\frac{\Theta''}{\Theta}=\lambda, \quad (\mathrm{I})\begin{cases} -r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=\lambda R \\ R(1)=0,\ R'(2)=0 \end{cases} \quad (\mathrm{II})\begin{cases} \Theta''=\lambda\Theta \\ \Theta(0)=0. \end{cases}$$

Diff. ekv i (I): $r^2R''+rR'+\lambda R=0$ är av Eulertyp. Sätt $t=\ln r$.

Då blir $\frac{d}{dt}=\frac{d}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=r\frac{d}{dr}$, och med $T(t)=R(e^t)$ fås $T'=rR'$ och

det enklare egenvärdesproblemet: $\begin{cases} -T''=\lambda T, \\ T(0)=0,\ T'(\ln 2)=0. \end{cases}$

Egenvärden: $\lambda_n=\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ln 2}\right]^2=\beta_n^2$, $n=0,1,\dots$

Egenfunktioner: $T_n(t)=\sin\beta_n t$, $\quad R_n(r)=\sin(\beta_n \ln r)$.

(II) blir nu $\Theta''=\beta_n^2\Theta$ med lösn. $\Theta_n(\theta)=a_n\cosh\beta_n\theta+b_n\sinh\beta_n\theta$

$\Theta_n(0)=0$ ger $a_n=0$.

Ansätt totallösningen $u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}R_n(r)\Theta_n(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\sinh\beta_n\theta\cdot\sin(\beta_n\ln r)$.

Vi vill ha $u(r,\frac{\pi}{4})=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\sinh(\beta_n\frac{\pi}{4})\cdot\sin(\beta_n\ln r)=r-1$ eller

$\sum_{n=0}^{\infty}b_n\sinh(\beta_n\frac{\pi}{4})\sin\beta_n t=e^t-1$, $\quad 0<t<\ln 2$.

$\{\sin\beta_n t\}_{n=0}^{\infty}$ är ett fullständigt OG-system på $(0,\ln 2)$. Fourier koeff. till e^t-1 är $C_n=b_n\sinh(\beta_n\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\frac{\ln 2}{2}}\int_0^{\ln 2}(e^t-1)\sin\beta_n t\,dt$

$$=\frac{2}{\ln 2}\underbrace{\left[(e^t-1)\frac{-\cos\beta_n t}{\beta_n}\right]_0^{\ln 2}}_{=0,\text{ ty } \beta_n=(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ln 2}}+\frac{2}{\ln 2}\int_0^{\ln 2}e^t\frac{\cos\beta_n t}{\beta_n}\,dt=\left[\text{Tabell}\right]$$

$$=\frac{2}{\beta_n\ln 2}\left[\frac{e^t(\cos\beta_n t+\beta_n\sin\beta_n t)}{\beta_n^2+1}\right]_0^{\ln 2}=\frac{2}{\ln 2\cdot\beta_n(\beta_n^2+1)}\left\{2\beta_n(-1)^n-1\right\}$$

$$b_n=\frac{C_n}{\sinh(\beta_n\frac{\pi}{4})}$$

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\left[2(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ln 2}(-1)^n-1\right]}{(n+\frac{1}{2})\pi\left[(n+\frac{1}{2})^2\left(\frac{\pi}{\ln 2}\right)^2+1\right]}\cdot\frac{\sinh\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\theta}{\ln 2}}{\sinh\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi^2}{4\ln 2}}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ln 2}\ln r\right).$$

31. Utveckla funktionen $\sin(2\sin x)$ i trigonometriska Fourierserie (reell form).

Lösning Genererande funktionen för $J_n(x)$ är (Se Folland!)

$$e^{ix\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, e^{in\theta}$$

Tag imaginärdelen (obs! $J_n(x)$ är reella):

$$\sin(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\sin n\theta = \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(x)\sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\sin n\theta$$

$$= [\text{byt } n \to -n \text{ i första summan}] = \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(x)\sin(-n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\sin n\theta$$

$$= [J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} [1-(-1)^n] J_n(x)\sin n\theta$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(x)\sin(2k+1)\theta .$$

$x = 2$ & $\theta \to x$ ger

$$\sin(2\sin x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(2)\sin(2k+1)x .$$

32. Ett cirkulärt membran med radie a påverkas av en periodisk yttre kraft $q \sin\omega t$ likformig fördelad över membranet. För de transversella svängningarna har vi alltså ekvationen

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{q}{S}\sin\omega t, \quad u\Big|_{r=a} = 0.$$

Bestäm den stationära svängningsrörelsen (dvs. en lösning av formen $u(r,t) = v(r)\sin\omega t$). Vilka är resonans (vinkel) frekvenserna?

Lösning: I polära koordinater med $u = u(r,t)$ fås ekvationen:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{q}{S}\sin\omega t, \quad 0 < r < a; \qquad u(a,t) = 0.$$

Låt $u = \operatorname{Im}\tilde{u}$, där $\tilde{u}$ satisfierar $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = -\frac{q}{S}e^{i\omega t}$, $\tilde{u}(a,t) = 0$.

Sök lösning av formen $\tilde{u}(r,t) = v(r)\,e^{i\omega t}$,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)e^{i\omega t} + \frac{\omega^2}{c^2}v\,e^{i\omega t} = -\frac{q}{S}e^{i\omega t}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 v = -\frac{q}{S}, \quad v(a) = 0, \quad v(r) \text{ begr. då } r \to 0^+.$$

Inhomogen ekvation. En partikulärlösning är $v_p = A = $ konst.

Insättning ger $A = -\frac{q}{S}\left(\frac{c}{\omega}\right)^2$.

Den homogena ekvationen $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 v = 0$

är Bessels diff. ekv. av ordn. 0 med allmän lösning

$$v_h(r) = C_1 J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) + C_2 Y_0\left(\frac{\omega r}{c}\right).$$

Begr. lösn. då $r \to 0+ \Rightarrow C_2 = 0$

$$v(r) = v_p + v_h(r) = -\frac{q}{S}\cdot\frac{c^2}{\omega^2} + C_1 J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)$$

$$v(a) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{q c^2}{S\omega^2 J_0\left(\frac{\omega a}{c}\right)}$$

$$v(r) = \frac{q}{S}\frac{c^2}{\omega^2}\left[\frac{J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)}{J_0\left(\frac{\omega a}{c}\right)} - 1\right], \qquad \underline{u(r,t) = v(r)\sin\omega t}$$

Resonansfrekvenserna fås ur $J_0\left(\frac{\omega a}{c}\right) = 0$. De är alltså

$\underline{\omega = \omega_n = \frac{c}{a}\alpha_{0,n}}$, där $\alpha_{0,n}$, $n = 1, 2, \ldots$, är J_0:s positiva nollställen.

33. Lös värmeledningsekvationen $u'_t = \nabla^2 u$ i en cylinder med radien b. Ändytorna är isolerade, medan mantelytan $r=b$ (cylinderkoordinater) lyder avsvalningslagen $u + 2u'_r = 0$. Begynnelsetemperaturen är $u|_{t=0} = r^2 = x^2+y^2$.

<u>Lösning</u>: För $u=u(r,t)$ gäller att

$$\begin{cases} u_t = \nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), & 0<r<b,\ t>0 \\ u \text{ begr. då } r \to 0^+ \\ u(b,t) + 2u_r(b,t) = 0 \\ u(r,0) = r^2 = x^2+y^2. \end{cases}$$

Ansätt $u(r,t) = R(r)T(t) \neq 0$ i de homogena ekv.

$$RT' = \frac{1}{r}(rR')'T, \quad \frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} = \frac{T'}{T} = -\lambda.$$

$$\text{(I)} \begin{cases} -\frac{1}{r}(rR')' = \lambda R \\ R(r) \text{ begr. då } r \to 0 \\ R(b) + 2R'(b) = 0 \end{cases} \qquad \text{(II)} \quad T' = -\lambda T.$$

(I) är ett singulärt S-L-problem med $\lambda > 0$. Sätt $\lambda = \beta^2$ med $\beta > 0$ så fås $R(r) = C_1 J_0(\beta r) + C_2 Y_0(\beta r)$. $R(r)$ begr. då $r \to 0 \Rightarrow C_2 = 0$.

$R(b) + 2R'(b) = C_1\left[J_0(\beta b) + 2\beta J_0'(\beta b)\right] = 0$. Då $C_1 \neq 0$ är (βb) ett nollställe till $\underbrace{J_0(x) + \frac{2}{b}x J_0'(x)}_{(*)}$. {jfr med thm 5.3 (b) $\beta b = x \Rightarrow \beta = \frac{x}{b}, \dots$}.

Låt α_k, $k=0,1,2,\dots$, vara de positiva nollställena till denna funktion (*).

Då är $\beta_k b = \alpha_k$. Egenfunktionerna är $\underline{R_k(r) = J_0(\beta_k r)}$ (Tag! $C_1 = 1$)

(II) ger $T_k'(t) = -\beta_k^2 T_k(t)$, $\underline{T_k(t) = a_k e^{-\beta_k^2 t}}$.

Alltså är $u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) R_k(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\beta_k^2 t} J_0(\beta_k r)$.

$\{R_k(r)\}_{k=1}^{\infty} = \{J_0(\beta r)\}_{k=1}^{\infty}$ är ett fullständigt ortogonalsystem: OG-bas på $(0,b)$ med viktfunktion r (Cf. Thm 5.3). Utveckla $u(r,0) = r^2$ i F-serie m.a.p. detta system. Fourierkoeff. $a_k = \frac{1}{\rho_k}\int_0^b r^2 J_0(\beta_k r)\, r\,dr$, där

$$\rho_k = \int_0^b J_0^2(\beta_k r)\, r\,dr = \{\text{sätt } x = \beta_k r\} = \frac{1}{\beta_k^2}\int_0^{\beta_k b = \alpha_k} J_0^2(x)\, x\,dx$$

$$= \{\text{Lemma 5.4, } (\nu = 0)\} = \frac{1}{\beta_k^2} \cdot \frac{\alpha_k^2}{2}\left(J_0'^2(\alpha_k) + J_0^2(\alpha_k)\right).$$

Eftersom $J_0(\alpha_k) + 2\beta_k J_0'(\alpha_k) = 0$, är $J_0'(\alpha_k) = -\frac{J_0(\alpha_k)}{2\beta_k}$, och

$$\underline{\underline{\rho_k}} = \frac{b^2}{2}\left[J_0^2(\alpha_k) + \frac{J_0^2(\alpha_k)}{4\beta_k^2}\right] = \underline{\underline{\frac{b^2}{2} \cdot \frac{4\beta_k^2 + 1}{4\beta_k^2} J_0^2(\alpha_k)}}.$$

34. a) Bestäm en begränsad lösning av formen $u(r,t) = v(r)e^{i\omega t}$ till ekvationen

$$ⓐ \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) - \dfrac{n^2}{r^2}u, & 0<r<a, \\ u(a,t) = e^{i\omega t}, \end{cases}$$

där $n \geq 0$ är ett heltal. För vilka värden på $\omega > 0$ finns en sådan lösning?

b) Låt ω vara sådant att lösningen i a) existerar. Visa hur den kan användas för att lösa

$$ⓑ \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) - \dfrac{n^2}{r^2}u = 0, & 0<r<a,\ t>0 \\ u(a,t) = \sin\omega t, & u \text{ begränsad} \\ u(r,0) = 0, & u_t(r,0) = 0. \end{cases}$$

Lösning: a) Ansatt $u(r,t) = v(r)e^{i\omega t}$ får $v(r)(i\omega)^2 e^{i\omega t} = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) - \frac{n^2}{r^2}v\right)e^{i\omega t}$,

$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) + \left(\omega^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)v = 0, \quad v'' + \frac{1}{r}v' + \left(\omega^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)v = 0,$

Bessels diff.ekv. av ordning n, $v(r) = AJ_n(\omega r) + BY_n(\omega r)$.

u begr. $\Rightarrow$ v begr. $\Rightarrow B = 0$, $\quad u(a,t) = v(a)e^{i\omega t} = e^{i\omega t} \Rightarrow$

$v(a) = 1 = AJ_n(\omega a) \Rightarrow \{\text{om } \underline{\underline{J_n(\omega a) \neq 0}}\}; \quad A = \frac{1}{J_n(\omega a)}; \quad \underline{\underline{v(r) = \frac{J_n(\omega r)}{J_n(\omega a)}}}.$

b) $\underline{\underline{\tilde{u}(r,t) \overset{a)}{=} \operatorname{Im}\left[v(r)e^{i\omega t}\right] = \frac{J_n(\omega r)}{J_n(\omega a)}\sin\omega t}} \quad (= v(r)\sin\omega t),$

är en lösning till de två första ekvationerna i ⓑ.

Sätt $w = u - \tilde{u}$. Då fås för w

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) - \frac{n^2}{r^2}w$$

$$w(a,t) = u(a,t) - \tilde{u}(a,t) = \sin\omega t - \frac{\overset{1}{\cancel{J_n(\omega a)}}}{\cancel{J_n(\omega a)}}\sin\omega t = 0$$

$$w(r,0) = 0, \quad w_t(r,0) = u_t(r,0) - \tilde{u}_t(r,0) = -\frac{\omega J_n(\omega r)}{J_n(\omega a)}.$$

$w(r,t) = R(r)T(t) \neq 0$ ger $RT'' = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rR')T - \frac{n^2}{r^2}RT,$

$$\frac{T''}{T} = \frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} - \frac{n^2}{r^2} = -\lambda$$

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0 \\ R(a) = 0, \quad R \text{ begr.} \end{cases} \qquad (\mathrm{II}) \begin{cases} T'' = -\lambda T \\ T(0) = 0. \end{cases}$$

$\rightarrow$

forts
E6-34

... 34)

(I) är ett egenvärdesproblem med egenvärden $\lambda > 0$. Med $\lambda = \mu^2$, $(\mu > 0)$ fås

$$R(r) = A J_n(\mu r) + B Y_n(\mu r). \qquad \text{Begr lösn.} \Rightarrow B = 0.$$

$R(a) = 0 \overset{A\neq 0}{\Rightarrow} J_n(\mu a) = 0$. Låt α_k, $k = 1, 2, \ldots$, vara de positiva nollställerna till $J_n(x)$. Då är $\mu a = \alpha_k$, $\mu = \mu_k = \dfrac{\alpha_k}{a}$.

$T = T_k(t) = a_k \sin \mu_k t + b_k \cos \mu_k t$; $\quad T_k(0) = 0 \Rightarrow b_k = 0, \ \forall k = 1, 2, \ldots$

Ansätt $\underline{\underline{w(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \mu_k t \cdot J_n(\mu_k r)}}$

$$w_t(r,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu_k J_n(\mu_k r) = -\frac{\omega J_n(\omega r)}{J_n(\omega a)}.$$

$\{J_n(\mu_k r)\}_{k=1}^{\infty}$ är en ortogonal bas för $L^2_w(0,a)$ där $w(r) = r$.

$$a_k \mu_k = \frac{1}{\|J_n(\mu_k r)\|_w^2} \int_0^a \frac{-\omega J_n(\omega r)}{J_n(\omega a)} J_n(\mu_k r) \, r \, dr.$$

$$\|J_n(\mu_k r)\|_w^2 = \frac{a^2}{2} \left[J_{n+1}(\alpha_k) \right]^2 \qquad \{\text{cf. thm 5.3 a)}\}.$$

$$a_k = -\frac{2\omega}{a^2 J_{n+1}^2(\alpha_k) J_n(\omega a)} \int_0^a J_n(\omega r) J_n\left(\frac{\alpha_k}{a} r\right) r \, dr.$$

$$\underline{\underline{u(r,t) = \tilde{u}(r,t) + w(r,t) = \frac{J_n(\omega r)}{J_n(\omega a)} \sin \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\alpha_k}{a} t \, J_n\left(\frac{\alpha_k}{a} r\right).}}$$

α_k och a_k som ovan.

35. Lös Laplaces ekvation $\nabla^2 u = 0$ i cylindern $r = \sqrt{x^2+y^2} < R$, $0 < z < L$, då $u = 0$ för $z = 0$ och $z = L$, och $u = \sin\frac{\pi z}{L}\left(1 - \cos\frac{\pi z}{L}\right)$ för $r = R$.

Lösning: För $u = u(r,z)$ gäller (Laplaces ekv i cylinder koord.)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & 0 < r < R, \quad 0 < z < L \\ u(r,0) = 0, \quad u(r,L) = 0 \\ u(R,z) = \sin\frac{\pi z}{L}\left(1 - \cos\frac{\pi z}{L}\right). \end{cases}$$

Var.-sep. $u(r,z) = R(r)\,Z(z) \neq 0$ ger $(R'' + \frac{1}{r}R')Z + RZ'' = 0$, $\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = \lambda$

(I) $\begin{cases} Z'' = -\lambda Z \\ Z(0) = Z(L) = 0 \end{cases}$ har lösningarna $\begin{cases} \lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \; n = 1, 2, \ldots \\ Z = Z_n(z) = \sin\frac{n\pi}{L}z. \end{cases}$

(II) $R'' + \frac{1}{r}R' - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 R = 0 \iff r^2R'' + rR' - \left(\frac{n\pi r}{L}\right)^2 R = 0$,

Bessels modifierade ekv. (se Folland sid 158–160):
(Bessels ekv med $x \to ix$).

Allmän lösning $R(r) = a I_0\left(\frac{n\pi r}{L}\right) + b K_0\left(\frac{n\pi r}{L}\right)$.

$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$, $\quad K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi} = \left(Y_\nu(ix)\right)$.

$R(r)$ begr. då $r \to 0 \Rightarrow b = 0$

Ansats $u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_0\left(\frac{n\pi r}{L}\right)\sin\frac{n\pi z}{L}$

$u(R,z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_0\left(\frac{n\pi R}{L}\right)\sin\frac{n\pi z}{L} = \sin\frac{\pi z}{L}\left(1 - \cos\frac{\pi z}{L}\right) = \sin\frac{\pi z}{L} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi z}{L}$

$a_1 I_0\left(\frac{\pi R}{L}\right) = 1$, $\quad a_2 I_0\left(\frac{2\pi R}{L}\right) = -\frac{1}{2}$, $\quad a_n I_0\left(\frac{n\pi R}{L}\right) = 0$

$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{I_0\left(\frac{\pi R}{L}\right)}$, $\quad a_2 = -\frac{1}{2 I_0\left(\frac{2\pi R}{L}\right)}$, $\quad a_n = 0$ för övriga n.

$$\underline{\underline{u(r,z) = \frac{I_0\left(\frac{\pi r}{L}\right)}{I_0\left(\frac{\pi R}{L}\right)}\sin\frac{\pi z}{L} - \frac{1}{2}\frac{I_0\left(\frac{2\pi r}{L}\right)}{I_0\left(\frac{2\pi R}{L}\right)}\sin\frac{2\pi z}{L}.}}$$

36. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som gör integralen

$$\int_0^\infty [\sqrt{x} - P(x)]^2 e^{-x}\,dx,$$

så liten som möjligt.

Lösning: Använd Laguerrpolynom som är ortogonala på $(0,\infty)$ med viktfunktion e^{-x} ($w(x) = x^\alpha e^{-x}$ med $\alpha = 0$). Skriv!

$$P(x) = c_0 L_0(x) + c_1 L_1(x) + c_2 L_2(x),$$

Då blir $\int_0^\infty [\sqrt{x} - \sum_{k=0}^{2} c_k L_k(x)]^2 e^{-x}dx = \|\sqrt{x} - \sum_{k=0}^{2} c_k L_k(x)\|^2_{w(x)}$

så liten som möjligt, då

$$c_k = \frac{1}{\rho_k}\int_0^\infty \sqrt{x}\, L_k(x) e^{-x}\,dx = \int_0^\infty \sqrt{x}\, L_k(x)\,dx, \quad \text{ty}$$

$$\rho_k = \frac{1}{\|L_k\|^2_w} = \left.\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right|_{(\alpha=0)} = \frac{n!}{\Gamma(n+1)} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Vi behöver integraler av typen $I_n = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} x^n e^{-x} = \int_0^\infty x^{n+\frac{3}{2}-1} e^{-x}\,dx$
$= \Gamma(n+\frac{3}{2}) = (n+\frac{1}{2})\,\Gamma(n+\frac{1}{2})$:

$$I_0 = \int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x}\,dx = \{n=0\} = \frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$I_1 = \int_0^\infty \sqrt{x}\, x e^{-x}\,dx = \{n=1\} = \underbrace{\frac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2})} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \underbrace{\frac{3}{4}}\sqrt{\pi}.$$

$$I_2 = \int_0^\infty \sqrt{x}\, x^2 e^{-x}\,dx = \{n=2\} = \frac{5}{2}\Gamma(\tfrac{5}{2}) = \frac{5}{2}\cdot\underbrace{\frac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2})} = \frac{5}{2}\cdot\underbrace{\frac{3}{4}}\sqrt{\pi} = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1-x, \quad L_2(x) = 1-2x+\frac{x^2}{2}$$

$$c_0 = \int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x}\,dx = I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$c_1 = \int_0^\infty \sqrt{x}\,(1-x)e^{-x}\,dx = I_0 - I_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{3}{4}\sqrt{\pi} = -\frac{1}{4}\sqrt{\pi}.$$

$$c_2 = \int_0^\infty \sqrt{x}\,(1-2x+\frac{x^2}{2})e^{-x}\,dx = I_0 - 2I_1 + \frac{1}{2}I_2 = \left(\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{8}\right)\sqrt{\pi} = -\frac{1}{16}\sqrt{\pi}$$

$$P(x) = \sqrt{\pi}\left[\frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{4}(1-x) - \frac{1}{16}\left(1-2x+\frac{x^2}{2}\right)\right] = \underline{\underline{\frac{\sqrt{\pi}}{16}\left(3+6x-\frac{1}{2}x^2\right).}}$$

EÖ-37

37. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som gör integralen

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x^4-P(x)\right]^2 e^{-x^2/2}\,dx,$$

så liten som möjligt.

Lösning: $I=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x^4-P(x)\right]^2 e^{-x^2/2}\,dx=\left[\text{sätt } \frac{x}{\sqrt{2}}=s\right]\Rightarrow$

$I=\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[4s^4-Q(s)\right]^2 e^{-s^2}\,ds$, där $Q(s)=P(\sqrt{2}s)$.

Använd Hermite-Polynom $H_n(x)$, och ansätt.

$Q(s)=\sum_{k=0}^{1} c_k H_{2k}(s)$.

Integralen blir minimal då $c_k=\frac{1}{\delta_k}\int_{-\infty}^{\infty} H_{2k}(s)\cdot 4s^4 e^{-s^2}\,ds$

$=4\cdot\frac{1}{\delta_k}\int_{-\infty}^{\infty} H_{2k}(s)\,s^4 e^{-s^2}\,ds$, med $\delta_k=(2k)!\,2^{2k}\sqrt{\pi}$, ...

Alternativt

Jfr. med övning 6.4: 4; i Folland: $\underline{\underline{x^{2m}=\sum_{k=0}^{m}\frac{(2m)!\,H_{2k}(x)}{2^{2m}(2k)!\,(m-k)!}}}$,

och sätt $m=2$, $(2m=4)$ fås;

$c_0=4\cdot\frac{4!}{2^4(0!)2!}=4\,\frac{1\times2\times3\times4}{4\times4\times2}=3$

$c_1=4\cdot\frac{4!}{2^4(2!)1!}=3$

Alltså $P(\sqrt{2}s)=3H_0(s)+3H_1(s)=3\cdot1+3(4s^2-2)=3(4s^2-1)$

Varför

$$\underline{\underline{P(x)=3(2x^2-1)}}.$$

Obs! x^4 jämn kräver endast jämna Hermite utv.

38. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som gör integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{x/4}-P(x)\right]^2 x e^{-x}\,dx$$

så liten som möjligt.

Lösning: Använd Laguerrepolynomen $L_n^{(\alpha)}$ som är ortogonala på $(0,\infty)$ med viktfunktionen $x^\alpha e^{-x}$, (här $\alpha=1$). $L_n^{(1)}(x)=\frac{x^{-1}e^x}{n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+1}e^{-x}\right)$.

$L_0^{(1)}(x)=x^{-1}e^x\cdot xe^{-x}=1$

$L_1^{(1)}(x)=x^{-1}e^x\frac{d}{dx}\left(x^2e^{-x}\right)=x^{-1}e^x\left(2xe^{-x}-x^2e^{-x}\right)=2-x$

$L_2^{(1)}(x)=\frac{x^{-1}e^x}{2!}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3e^{-x}\right)=\frac{1}{2}x^{-1}e^x\left(3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}\right)'$

$=\frac{1}{2}x^{-1}e^x\left(6x-3x^2-3x^2+x^3\right)e^{-x} = 3-3x+\frac{1}{2}x^2$

$$\|L_n^{(1)}\|_w^2=\int_0^\infty\left[L_n^{(1)}(x)\right]^2xe^{-x}\,dx \underset{\uparrow}{=}\frac{\Gamma(n+2)}{n!}=\frac{(n+1)!}{n!}=n+1.$$

(Thm 6.15 med $\alpha=1$)

Skriv $P(x)=\sum_{n=0}^{2}c_nL_n^{(1)}(x)$. $\int_0^\infty\left[e^{x/4}-P(x)\right]^2xe^{-x}$ blir så liten som möjligt om och endast om $c_n=\frac{1}{\|L_n^{(1)}\|_w^2}\int_0^\infty e^{x/4}L_n^{(1)}(x)\,xe^{-x}\,dx$

$=\frac{1}{n+1}\int_0^\infty L_n^{(1)}(x)\,xe^{-3/4x}\,dx$, för $n=0,1,2$.

Observera att $I=\int_0^\infty x^me^{-3/4x}\,dx=\left[\frac{3}{4}x=y\right]=\int_0^\infty\left(\frac{4}{3}\right)^my^me^{-y}\frac{4}{3}\,dy=\left(\frac{4}{3}\right)^{m+1}\Gamma(m+1)$

$=\left(\frac{4}{3}\right)^{m+1}m!$

$n=0$: $c_0=\frac{1}{0+1}\int_0^\infty xe^{-3/4x}\,dx=I_1=\left(\frac{4}{3}\right)^2 1!=\frac{16}{9}$

$n=1$: $c_1=\frac{1}{1+1}\int_0^\infty(2-x)xe^{-3/4x}\,dx=\frac{1}{2}\left\{2I_1-I_2\right\}=I_1-\frac{1}{2}I_2=\frac{16}{9}-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^3(2!)$

$=\frac{16}{9}-\frac{64}{27}=-\frac{16}{27}$

$n=2$: $c_2=\frac{1}{2+1}\int_0^\infty\left(3-3x+\frac{1}{2}x^2\right)xe^{-\frac{3}{4}x}\,dx=\frac{1}{3}\left[3I_1-3I_2+\frac{1}{2}I_3\right]$

$=I_1-I_2+\frac{1}{6}I_3=\frac{16}{9}-\left(\frac{4}{3}\right)^3(2!)+\frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^4(3!)=\cdots=\frac{16}{81}.$

$P(x)=c_0L_0^{(1)}(x)+c_1L_1^{(1)}(x)+c_2L_2^{(1)}(x)=\frac{16}{9}\cdot1-\frac{16}{27}(2-x)+\frac{16}{81}\left(3-3x+\frac{1}{2}x^2\right)$

$\therefore$ $\underline{\underline{P(x)=\frac{8}{81}\left(x^2+12\right)}}.$

Eö.38 — Bestäm $P(x)$, med $\deg(P(x)) \le 2$ som minimerar

Alternativ lösning

integralen $\int_0^\infty \left[e^{\frac{x}{4}} - P(x)\right]^2 x e^{-x}\,dx$.

Lösning. Vi började Laguerrepolynom $L_n^{(\alpha)}$ som är ortogonala på $(0,\infty)$ med viktfunktionen $x^\alpha e^{-x}$ $(\alpha=1)$: $L_n^{(1)}(x) = \frac{x^{-1}e^{x}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+1}e^{-x}\right)$.

$$L_0^{(1)}(x) = x^{-1}e^{x}xe^{-x} = 1$$

$$L_1^{(1)}(x) = x^{-1}e^{x}\frac{d}{dx}\left(x^2e^{-x}\right) = x^{-1}e^{x}\left(2x - x^2\right)e^{-x} = 2-x$$

$$L_2^{(1)}(x) = \frac{x^{-1}e^{x}}{2!}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3e^{-x}\right) = \frac{1}{2}x^{-1}e^{x}\left(3x^2e^{-x} - x^3e^{-x}\right)' = \ldots = 3-3x+\frac{1}{2}x^2$$

$$\|L_n^{(1)}\|_w^2 = \int_0^1 \left[L_n^{(1)}(x)\right]^2 xe^{-x}\,dx \underset{(\text{Thm } 6.15)}{=} \frac{\Gamma(n+2)}{n!} = \frac{n+1}{n!} = n+1$$

Skriv $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n L_n^{(1)}(x)$; $\int_0^\infty \left[e^{x/4} - P(x)\right]^2 xe^{-x}\,dx$ blir minimal $\iff C_n = \frac{1}{\|L_n^{(1)}\|_w^2}\int_0^1 e^{x/4}L_n^{(1)}(x)xe^{-x}\,dx \quad n=0,1,2.$

Enl. 6.5:5, Folland $\quad e^{-bx} = \left(\frac{1}{b+1}\right)^{\alpha+1}\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)\left(\frac{b}{b+1}\right)^n,\ b>0.$

I själva verket man kan visa detta för $b \ge -\frac{1}{2}$. Då för $b=-\frac{1}{4}$ & $\alpha=1$ fås

$$e^{\frac{x}{4}} = \left(\frac{1}{-\frac{1}{4}+1}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(1)}(x)\left(\frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}+1}\right)^n,$$

vilket approximeras $\{$i $L^2_w(0,\infty)$ med viktfunktion $w(x) = xe^{-x}\}$, optimalt, med andra gradspolynom bestående av de 3 första termerna; dvs med

$$P(x) = \left(\tfrac{4}{3}\right)^2\left[L_0^{(1)}(x)\left(-\tfrac{1}{3}\right)^0 + L_1^{(1)}(x)\left(-\tfrac{1}{3}\right)^1 + L_2^{(1)}(x)\left(-\tfrac{1}{3}\right)^2\right]$$

$$= \frac{16}{9}L_0^{(1)}(x) - \frac{16}{27}L_1^{(1)}(x) + \frac{16}{81}L_2^{(1)}(x)$$

$$= \frac{16}{9}\cdot 1 - \frac{16}{27}(2-x) + \frac{16}{81}\left(3-3x+\frac{1}{2}x^2\right).$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{P(x) = \frac{8}{81}\left(x^2+12\right).}}$$

39. Bestäm det polynom av formen $P(x) = x^3+ax^2+bx+c$ för vilket

$$\int_0^1 [P(x)]^2\,dx \text{ är så litet som möjligt.}$$

Lösning: $x \in [0,1] \xrightarrow[t=2x-1]{} t \in [-1,1] \Rightarrow \int_0^1 [P(x)]^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 P\left[\frac{1}{2}(t+1)\right]^2 dt$

$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2 \int_{-1}^1 \left[t^3 - (At^2+Bt+C)\right]^2 dt = \frac{1}{128}J.$ J är minimal då

$J = \int_{-1}^1 \left[t^3 - \{c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x)\}\right]^2 dx$ med $P_0=1,\ P_1=t,\ P_2=\frac{1}{2}(3t^2-1)$;

Legendre polynomen och $c_k = \frac{1}{\|P_k\|^2}\int_{-1}^1 t^3 P_k(t)\,dt,\ k=0,1,2$ är F-koeff. av t^3 i OG-bas $\{P_0(t), P_1(t), P_2(t)\}$ för polynom av grad 2.

$\|P_k\|^2 = \frac{2}{2k+1}$, $\quad c_0 = \frac{1}{\|P_0\|^2}\int_{-1}^1 t^3 P_0(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 t^3 dt = 0,$

$c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^1 t^3\cdot t\,dt = 3\int_0^1 t^4 dt = \frac{3}{5},\quad c_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^1 t^3\cdot\frac{1}{2}(3t^2-1) = \{\text{udda}\} = 0.$

Alltså J är minimal då $P\left[\frac{1}{2}(t+1)\right] = \frac{1}{8}\left(t^3 - \frac{3}{5}t\right)$ dvs

$\underline{\underline{P(x)}} = P\left[\frac{1}{2}(t+1)\right] = \left(\frac{1}{2}t\right)^3 - \frac{3}{8\cdot 5}t = \{t=2x-1\} = \left(\frac{1}{2}(2x-1)\right)^3 - \frac{3}{8\cdot 5}(2x-1)$

$= \left(x-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{40}(2x-1) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} - \frac{3}{20} + \frac{3}{40} = \underline{\underline{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}}}.$

Alternativ Lösning: Sätt $P(x) = x^3+ax^2+bx+c = x^3 - Q(x)$.

$I = \int_0^1 [P(x)]^2 dx = \int_0^1 \left[x^3 - Q(x)\right]^2 dx = [t=2x-1] = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \left[\left(\frac{t+1}{2}\right)^3 - Q\left(\frac{t+1}{2}\right)\right]^2 dt$

Skriv andragradspolynomet $Q\left(\frac{t+1}{2}\right)$ som $A_0P_0(t) + A_1P_1(t) + A_2P_2(t)$, där $P_k(t)$ är Legendre polynom. I blir så litet som möjligt om och endast om $A_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^1 \left(\frac{t+1}{2}\right)^3 P_k(t)\,dt = \left\{x = \frac{t+1}{2} \Rightarrow dt = 2\,dx \ldots\ \ 0 \xrightarrow{x} 1\ \ -1 \xrightarrow{t} 1\right\}$

$= \frac{2k+1}{2}\cdot 2\int_0^1 x^3 P_k(2x-1)\,dx = (2k+1)\int_0^1 x^3 P_k(2x-1)\,dx \Rightarrow$

$A_0 = 1\cdot\int_0^1 x^3\cdot\underset{P_0}{1}\,dx = \frac{1}{4};\quad A_1 = 3\int_0^1 x^3 \underbrace{(2x-1)}_{P_1(s)=s} dx = 3\int_0^1 (2x^4 - x^3)dx = 3\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right),$

$A_1 = \frac{9}{20};\quad A_2 = 5\int_0^1 x^3 \underbrace{\frac{1}{2}\left[3(2x-1)^2-1\right]}_{P_2(s)=\frac{1}{2}(3s^2-1)} dx = \frac{5}{2}\int_0^1 x^3(12x^2-12x+2)\,dx$

$= 5\int_0^1 (6x^5 - 6x^4 + x^3)\,dx = 5\left(1 - \frac{6}{5} + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$

$Q(x) = A_0P_0(2x-1) + A_1P_1(2x-1) + A_2P_2(2x-1) = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{9}{20}(2x-1) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[3(2x-1)^2-1\right]$

$\therefore Q(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{1}{20} \Rightarrow \underline{\underline{P(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}}}.$

40. Visa att $\int_0^1 x P_{2m}(x)\,dx = \frac{1}{3}\binom{3/2}{m+1}$.

Lösning: Genererande funktionen för Legendre polynom:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = (1-2xz+z^2)^{-1/2}, \quad -1 \le x \le 1, \quad |z|<1 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_0^1 x P_n(x)\,dx \right\} z^n = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-2xz+z^2}}\,dx = [PI] = \left[x\left(-\frac{1}{z}\right)(1-2xz+z^2)^{1/2} \right]_{x=0}^{1}$$

$$+\frac{1}{z}\int_0^1 \sqrt{1-2xz+z^2}\,dx = -\frac{1}{z}\sqrt{1-2z+z^2} + \frac{1}{z}\left[-\frac{1}{2z}\cdot\frac{2}{3}(1-2xz+z^2)^{3/2} \right]_{x=0}^{1}$$

$$= -\frac{1}{z}(1-z) - \frac{1}{3z^2}\underbrace{(1-2z+z^2)^{3/2}}_{=(1-z)^3} + \frac{1}{3z^2}(1+z^2)^{3/2}$$

$$= -\frac{1}{3z^2}(1-z)\Big[\underbrace{3z+(1-z)^2}_{=1+z+z^2}\Big] + \frac{1}{3z^2}(1+z^2)^{3/2} = \{\text{obs! minitelescope i } \rho^{th}\}$$

$$= -\frac{1}{3z^2}(1-z^3) + \frac{1}{3z^2}(1+z^2)^{3/2} = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3z^2}\left[(1+z^2)^{3/2} - 1\right]$$

$$= \left\{ (1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k \quad -1<x<1 \right\} = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3z^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3/2}{k}z^{2k} - 1\right)$$

$$\underset{k \to n}{=} \frac{1}{3}z + \frac{1}{3z^2}\left[\cancel{\binom{3/2}{0}} + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{3/2}{n}z^{2n} - \cancel{1}\right] = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3/2}{n+1}z^{2(n+1)}$$

$$= \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3/2}{n+1}z^{2n}$$

koeff. för z^{2m} ger

$$\int_0^1 x P_{2m}(x)\,dx = \frac{1}{3}\binom{3/2}{m+1}.$$

41. Beräkna t.ex. med hjälp av genererande funktionen, $H_n'(0)$, där H_n är Hermites polynom.

Lösning: Genererande funktion:

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!} = e^{2xz-z^2} \Rightarrow \{\text{derivera m.a.p. } x\} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n'(x) \frac{z^n}{n!} = 2z\, e^{2xz-z^2}. \quad \text{Sätt } x=0 \text{ får}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n'(0) \frac{z^n}{n!} = 2z\, e^{-z^2} = 2z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^k}{k!} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{k!}$$

$$\Rightarrow H_n'(0) \cdot \frac{1}{n!} = \begin{cases} \dfrac{2(-1)^k}{k!}, & \text{om } n=2k+1 \\ 0, & \text{om } n=2k. \end{cases}$$

$$\Rightarrow H_n'(0) = \begin{cases} \dfrac{2(2k+1)!\,(-1)^k}{k!}, & n=2k+1, \quad k=0,1,\ldots \\ 0, & n=2k. \end{cases}$$

42. Visa följande formel för (de generaliserade) Laguerrpolynomen:

$$\frac{d}{dx} L_{n+1}^{\alpha}(x) = -L_n^{\alpha+1}(x).$$

(Ledning: Använd genererande funktionen.)

Lösning: Genererande funktionen: $\frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{(1-z)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x) z^n$

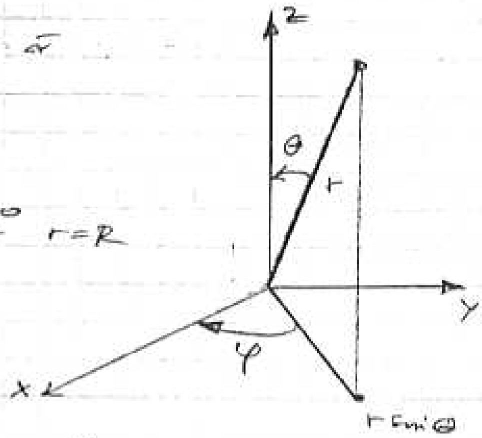
för $x>0$ och $|z|<1$. Derivera m.a.p. x

$$-\frac{z}{1-z} \frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{(1-z)^{\alpha+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} L_n^{\alpha}(x) z^n, \quad -\frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{(1-z)^{\alpha+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} L_n^{\alpha}(x) z^{n-1},$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha+1}(x) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} L_{n+1}^{\alpha}(x) z^n.$$

Identifiera koeff. för z^n, så fås påst. ☒

43. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i området $x^2+y^2+z^2 < R^2$ med randvillkorð $u = z(x^2+y^2)$ då $x^2+y^2+z^2 = R^2$.



Lösning: I sfäriska koordinater är

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & i\ r < R \\ u = z(x^2+y^2) = R^3 \cos\theta \sin^2\theta & på\ r = R \end{cases}$$

Lösning: φ oberoende ansats:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n r^{-n}\right) P_n(\cos\theta), \quad \left[\text{se. (6.13) \& sid 178 Folland}\right],$$

där P_n är Legendre polynom.

u begr. i $r=0 \Rightarrow$ alla $B_n = 0$

$$u(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos\theta) = R^3 \cos\theta \sin^2\theta = R^3(\cos\theta - \cos^3\theta).$$

Sätt $\xi = \cos(\theta)$, $P_1(\xi) = \xi$, $P_3(\xi) = \frac{1}{2}(5\xi^3 - 3\xi) \Rightarrow$

$$\frac{5}{2}\xi^3 = \frac{3}{2}P_1(\xi) + P_3(\xi) \Rightarrow \xi^3 = \frac{3}{5}P_1(\xi) + \frac{2}{5}P_3(\xi) \Rightarrow$$

$$\xi - \xi^3 = P_1(\xi) - \frac{3}{5}P_1(\xi) - \frac{2}{5}P_3(\xi) = \frac{2}{5}P_1(\xi) - \frac{2}{5}P_3(\xi)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\xi) = \frac{2}{5}R^3 P_1(\xi) - \frac{2}{5}R^3 P_3(\xi) \Rightarrow$$

$A_n = 0$ för alla n utom för $n=1$ och $n=3$;

$n=1$; $\quad A_1 R = \frac{2}{5}R^3 \Rightarrow A_1 = \frac{2}{5}R^2$

$n=3$: $\quad A_3 R^3 = -\frac{2}{5}R^3 \Rightarrow A_3 = -\frac{2}{5}$

$$u(r,\theta) = \frac{2R^2}{5} r P_1(\cos\theta) - \frac{2}{5} r^3 P_3(\cos\theta) = \frac{2R^2}{5} r\cos\theta - \frac{2r^3}{5}\cdot\frac{5\cos^3\theta - 3\cos\theta}{2}$$

$$= \frac{2R^2}{5}z - \frac{1}{5}(5z^3 - 3r^2 z) = \underline{\underline{\frac{2R^2}{5}z + \frac{3}{5}r^2 z - z^3}}.$$

$(x^2+y^2+z^2)$

44. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$, $0<a<r<b$ (sfäriska koordinater) med randvillkoren

$$\begin{cases} u = 1+\cos\theta, & \text{då } r=a \\ u = \cos(2\theta), & \text{då } r=b. \end{cases}$$

<u>Lösning</u>: En φ oberoende lösning kan ansättas:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n r^{-n-1}\right) P_n(\cos\theta) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u(a,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n a^n + B_n a^{-n-1}\right) P_n(\cos\theta) = P_0(\cos\theta) + P_1(\cos\theta) \\ u(b,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n b^n + B_n b^{-n-1}\right) P_n(\cos\theta) = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = C_0 P_0(\cos\theta) + C_2 P_2(\cos\theta) \end{cases}$$

$$= C_0 + C_2 \cdot \tfrac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

Identif. av koeff. $\Rightarrow \begin{cases} C_0 - \frac{C_2}{2} = -1 \\ \frac{3}{2} C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow C_2 = \frac{4}{3},\ C_0 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$

Koefficientidentifiering i Fourier-Legendre-serierna ger

<u>$n=0$</u>: $\begin{cases} A_0 + \frac{B_0}{a} = 1 \quad (-1) \\ A_0 + \frac{B_0}{b} = -\frac{1}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} B_0\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{4}{3}, \\ A_0 = 1 - \frac{4}{3}\frac{b}{b-a}, \end{cases}$ $\boxed{B_0 = \frac{4}{3}\frac{ab}{b-a}}$ $\boxed{A_0 = -\frac{1}{3}\frac{3a+b}{b-a}}$

<u>$n=1$</u>: $\begin{cases} A_1 a + \frac{B_1}{a^2} = 1 \\ A_1 b + \frac{B_1}{b^2} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} A_1 a - A_1 \frac{b^3}{a^2} = 1, \\ B_1 = -A_1 b^3 \end{cases}$ $\boxed{A_1 = -\frac{a^2}{b^3 - a^3}}$ $\boxed{B_1 = \frac{a^2 b^3}{b^3 - a^3}}$

<u>$n=2$</u>: $\begin{cases} A_2 a^2 + \frac{B_2}{a^3} = 0 \\ A_2 b^2 + \frac{B_2}{b^3} = \frac{4}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} B_2 = -A_2 a^5 \\ A_2 b^2 - A_2 \frac{a^5}{b^3} = \frac{4}{3} \end{cases}$ $\boxed{A_2 = \frac{4}{3}\frac{b^3}{b^5 - a^5}}$ $\boxed{B_2 = -\frac{4}{3}\frac{a^5 b^3}{b^5 - a^5}}$

<u>$n \geq 3$</u>: $\begin{cases} A_n a^n + \frac{B_n}{a^{n+1}} = 0 \\ A_n b^n + \frac{B_n}{b^{n+1}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \{\text{för } n\geq 3\},\ \boxed{A_n = B_n = 0}$

$$u(r,\theta) = \left(A_0 + \frac{B_0}{r}\right)P_0(\cos\theta) + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right)P_1(\cos\theta) + \left(A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^3}\right)P_2(\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{b-a}\left(\frac{4ab}{r} - 3a - b\right) + \frac{a^2}{b^3-a^3}\left(\frac{b^3}{r^2} - r\right)\cos\theta + \frac{2}{3}\frac{b^3}{b^5-a^5}\left(r^2 - \frac{a^5}{r^3}\right)\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

45. Sök en begränsad lösning till

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & -\infty<x<\infty,\ t>0 \\ u(x,0)=(1-2x^2)e^{-x^2}, & -\infty<x<\infty. \end{cases}$$

Lösning: $\mathcal{F}$-transf. i x-led $\Rightarrow$ $\hat{u}_t = k(i\xi)^2\hat{u}$, $\hat{u}_t = -k\xi^2\hat{u}$,

$\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}(\xi,0)e^{-k\xi^2 t}$; där $\hat{u}(\xi,0) \overset{\mathcal{F}}{\leftarrow} (1-2x^2)e^{-x^2} := u(x)$

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2/2}](\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\, e^{-\xi^2/2a} \Rightarrow \{a=2\} \Rightarrow \mathcal{F}[e^{-x^2}](\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2/4}$$

$$\mathcal{F}[-x^2 e^{-x^2}](\xi) = \mathcal{F}[(-ix)^2 e^{-x^2}](\xi) = \left(\frac{d}{d\xi}\right)^2 \mathcal{F}[e^{-x^2}](\xi) =$$

$$= \sqrt{\pi}\left(e^{-\xi^2/4}\right)'' = \sqrt{\pi}\left(-\frac{\xi}{2}e^{-\xi^2/4}\right)' = \sqrt{\pi}\left(\frac{\xi^2}{4}-\frac{1}{2}\right)e^{-\xi^2/4}.$$

$$\therefore\ u_0(x) = (1-2x^2)e^{-x^2} \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} \cancel{\sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}} + \sqrt{\pi}\,\frac{\xi^2}{2}e^{-\xi^2/4} - \cancel{\sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\xi^2 e^{-\xi^2/4}$$

$$u(\xi,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\xi^2 e^{-\xi^2/4}\cdot e^{-k\xi^2 t} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\xi^2 e^{-(kt+\frac{1}{4})\xi^2} \overset{\text{sätt}}{=} \left\{\frac{1}{2a} = kt+\frac{1}{4}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\xi^2 e^{-\xi^2/2a} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2}}\,\xi^2\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,e^{-\xi^2/2} \overset{\mathcal{F}}{\leftarrow} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2}}\left(i\frac{d}{dx}\right)^2\left(e^{-ax^2/2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2}}\left(-axe^{-ax^2/2}\right)' = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2}}\left(-a+a^2x^2\right)e^{-ax^2/2}$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^{3/2}(1-ax^2)e^{-ax^2/2} = \left\{a = \frac{2}{4kt+1}\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{4kt+1}\right)^{3/2}\left(1-\frac{2x^2}{4kt+1}\right)e^{-x^2/(4kt+1)}$$

$$\therefore\ u(x,t) = \frac{1}{(4kt+1)^{5/2}}\left(4kt+1-2x^2\right)e^{-\frac{x^2}{4kt+1}}.$$

46. Lös problemet $\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = x, & 0<x<1, \ -\infty<y<\infty \\ u'_x(0,y) = 0 \\ u(1,y) = y e^{-|y|}. \end{cases}$

Lösning: Homogenisera! Sätt $u(x,y) = v(x,y) + S(x)$.

Bestäm $S(x)$ så att $S''(x) = x$, $S'(0) = 0$, $S(1) = 0 \Rightarrow S'(x) = \frac{x^2}{2} + A$

$S'(0) = 0 \Rightarrow A = 0$, $S(x) = \frac{x^3}{6} + B$, $S(1) = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{6}$

$\therefore \ S(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{6}$

Problem för $v(x,y)$: $\begin{cases} v''_{xx} + v''_{yy} = 0 \\ v'_x(0,y) = 0 \\ v(1,y) = y e^{-|y|}. \end{cases}$

Fouriertransf i y-led ger
$$\begin{cases} (1) & \hat{v}''_{xx} - \omega^2 \hat{v} = 0 \\ (2) & \hat{v}'_x(0,\omega) = 0 \\ (3) & \hat{v}(1,\omega) = -\dfrac{4i\omega}{(1+\omega^2)^2} \left(= +i\dfrac{d}{d\omega}\left(\dfrac{2}{1+\omega^2}\right)\right) \end{cases}$$

(ty! $e^{-|y|} \overset{\mathcal{F}}{\supset} \frac{2}{1+\omega^2}$)

(1) ger $\hat{v}(x,\omega) = A(\omega)\cosh(\omega x) + B(\omega)\sinh(\omega x)$

(2) ger $B(\omega) = 0$

(3) ger $A(\omega)\cosh(\omega) = \dfrac{-4i\omega}{(1+\omega^2)^2} \Rightarrow A(\omega) = -\dfrac{4i\omega}{(1+\omega^2)^2\cosh\omega}$.

Inversionsformeln ger

$$v(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{-\frac{4i\omega\cosh\omega x}{(1+\omega^2)^2\cosh\omega}}_{\text{udda i } \omega} e^{i\omega y}\, d\omega$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\omega\cosh\omega x \sin\omega y}{(1+\omega^2)^2\cosh\omega}\, d\omega$$

$\Rightarrow$

$$u(x,y) = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{6} + \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\omega\cosh(\omega x)\sin(\omega y)}{(1+\omega^2)^2\cosh(\omega)}\, d\omega.$$

47. Låt f tillhöra $L^2(\mathbb{R})$ och sök en lösning till

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & -\infty < x < \infty,\ 0<y<a \\ u(x,0) = 0, & u(x,a) = f(x). \end{cases}$$

Visa att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,y)|^2 dx \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

Lösning: $\mathcal{F}$-transf. i x-led; $\hat{u}(\xi,y) = \mathcal{F}_x[u(x,y)] \Rightarrow$

$$(i\xi)^2 \hat{u} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = 0,\quad \hat{u}_{yy} - \xi^2 \hat{u} = 0;\quad \hat{u}(\xi,y) = C_1(\xi)\sinh(\xi y) + C_2(\xi)\cosh(\xi y)$$

$$\hat{u}(\xi,0) = C_2(\xi) = 0,\quad \hat{u}(\xi,a) = C_1(\xi)\sinh(\xi a) = \hat{f}(\xi)$$

$$C_1(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{\sinh(\xi a)},\quad \hat{u}(\xi,y) = \frac{\sinh(\xi y)}{\sinh(\xi a)}\hat{f}(\xi)$$

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(\xi y)}{\sinh(\xi a)} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

Alt. Enl Beta (se också lösning till 7.3:4) är

$$\mathcal{F}_t\left[\frac{\sinh at}{\sinh bt}\right](\omega) = \frac{\pi \sin\frac{\pi a}{b}}{b\cosh\frac{\omega a}{b} + b\cos\frac{\pi a}{b}} \quad \text{för } 0<a<b;$$

Sätt $a=y$, $b=a$ och använd symmetriregeln, så fås

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2a}\frac{\sin\frac{\pi y}{a}}{\cosh\frac{\pi x}{a} + \cos\frac{\pi y}{a}}\right] = \frac{\sinh \xi y}{\sinh \xi a}$$

Så att

$$u(x,y) = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi y}{a}}{\cosh\frac{\pi(x-t)}{a} + \cos\frac{\pi y}{a}} f(t)\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,y)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\xi,y)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{\sinh \xi y}{\sinh \xi a}\right)^2}_{\le 1} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \quad \text{enl Plancherel.}$$

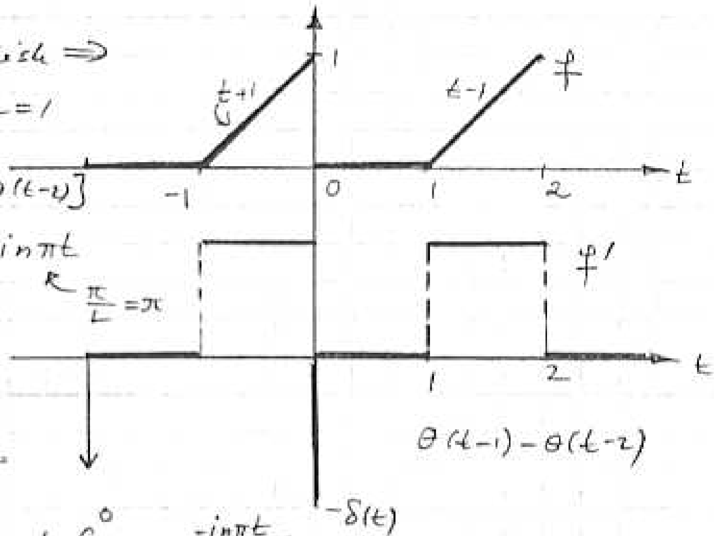
48. Bestäm en periodisk lösning till ekvationen $y''-y'+y=f'(t)$, där

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{för } 0<t\le 1.\\ t-1 & \text{för } 1<t<2,\end{cases}$$

och f är periodisk med period 2. (Med $f'(t)$ avses distributionsderivatan)

<u>Lösning:</u> f 2-periodisk $\Rightarrow$

$2L=2 \Rightarrow L=1$



$$f'(t)=-\delta(t)+[\theta(t-1)-\theta(t-2)]$$

Låt $f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f)\,e^{in\pi t}$ $\quad \frac{\pi}{L}=\pi$

$$f'(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n'\,e^{in\pi t}$$

med $\underline{c_n' = in\pi c_n}$

$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,e^{-in\pi t}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(t+1)\,e^{-in\pi t}\,dt$$

$n=0$: $\quad c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(t+1)\,dt=\frac{1}{2}\left.\frac{(t+1)^2}{2}\right|_{-1}^{0}=\frac{1}{4}, \quad \underline{c_0'=i(n=0)\pi c_0=0}$

$n\neq 0$: $\quad c_n \overset{PI}{=} \frac{1}{2}\left[(t+1)\frac{e^{-in\pi t}}{-in\pi}\right]_{-1}^{0}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{e^{-in\pi t}}{-in\pi}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-in\pi}$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-in\pi t}}{(-in\pi)^2}\right]_{t=-1}^{0}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{in\pi}+\frac{1}{(-in\pi)^2}-\frac{(-1)^n}{(-in\pi)^2}\right)$$

$$\frac{1}{in\pi}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{in\pi}-\frac{(-1)^n}{in\pi}\right)$$

$$c_n'=in\pi c_n=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{in\pi}-\frac{(-1)^n}{in\pi}\right)=\frac{1}{2in\pi}\left(-in\pi-1+(-1)^n\right)$$

Alltså är $\quad c_n'=\frac{1}{2n\pi}\left[-n\pi-i\left((-1)^n-1\right)\right], \; n\neq 0; \quad c_n'=0.$

Sätt $\quad y(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{in\pi t}, \quad y'(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} in\pi d_n e^{in\pi t}, \quad y''(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2\pi^2 d_n e^{in\pi t}$

$$y''-y'+y=f'(t) \Leftrightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} d_n\{1-in\pi-n^2\pi^2\}e^{in\pi t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n' e^{in\pi t}$$

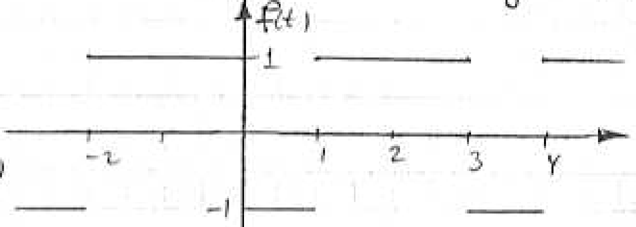
$$\Rightarrow d_n=\frac{c_n'}{1-in\pi-n^2\pi^2} \Rightarrow d_n=\frac{1}{2n\pi}\cdot\frac{-n\pi-i\left((-1)^n-1\right)}{1-in\pi-n^2\pi^2}, \quad d_0=0$$

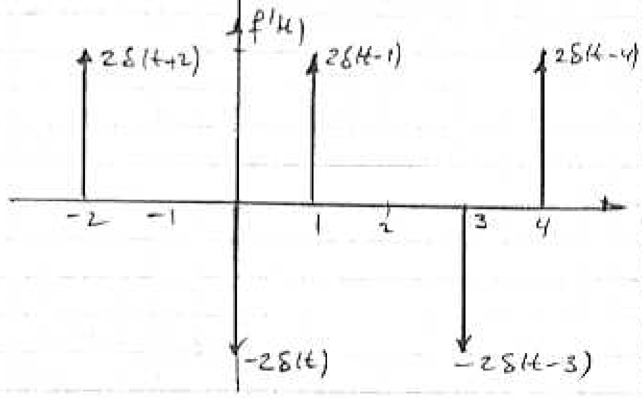
$$y_n=\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{2n\pi}\cdot\frac{n\pi-i\left(1-(-1)^n\right)}{n^2\pi^2-1+in\pi}\,e^{in\pi t}$$

49. Om funktionen f gäller att

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{för } 0<t<1 \\ 1 & \text{för } 1<t<3, \end{cases}$$

och $f(t)$ är periodisk med perioden 3. Bestäm $f'(t)$ (distributionsderivatan) och utveckla $f'(t)$ i komplex trigonometrisk Fourierserie. Använd resultatet för att beräkna Fourierserieutvecklingen av $f(t)$.





<u>Lösning</u>: Fig. visar att

$$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\delta(t-3n-1) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\delta(t-3n)$$

$$= 2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\delta(t-3n-1) - \delta(t-3n)\right]$$

$T=3, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}$

$$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{3}t}, \text{ där}$$

$$\underline{\underline{c_n}} = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} f'(t)\, e^{-in\frac{2\pi}{2}t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2}\left[2\delta(t-1) - 2\delta(t)\right] e^{-in\frac{2\pi}{3}t}\,dt = \frac{2}{3}\left(e^{-in\frac{2\pi}{3}} - e^{0}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{3}\left(e^{-in\frac{2\pi}{3}} - 1\right)}},$$

$$c_0 = 0, \quad \underline{\underline{f'(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{3}t}}}$$

$$f(t) = \sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{in\frac{2\pi}{3}} e^{in\frac{2\pi}{3}t} + A.$$

A är Fourierkoeff för $n=0$ för $f(t)$, varför $A = \frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\,dt =$

$= \frac{1}{3}(-1+2) = \frac{1}{3}$

$$\underline{\underline{f(t) = \frac{1}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{e^{-in\frac{2\pi}{3}} - 1}{in\pi}\, e^{in\frac{2\pi}{3}t}}}.$$

52. Lös problemet $\begin{cases} u_{xx}+1=\frac{1}{4}u_{tt}, & 0<x<2,\ t>0 \quad \text{(DE)} \\ u(0,t)=0, \quad u(x,0)=x-x^2 & \text{(RV)} \\ u(2,t)=-2, \quad u_t(x,0)=0. & \text{(BV)} \end{cases}$ Eö-52

Lösning: (DE), (RV) ej homogena, ansätt $u(x,t)=w(x,t)+S(x)$, så att problemet för w blir homogent. Då satisfierar S i $\begin{cases} S''(x)=-1 \\ S(0)=0, \quad S(2)=-2 \end{cases}$

$\Rightarrow S(x)=-\frac{x^2}{2}+Ax+B$, $S(0)=B=0$, $S(2)=-2+2A=-2 \Rightarrow A=0$.

Alltså $\underline{\underline{S(x)=-\frac{x^2}{2}}}$. Då blir problemet för w följande:

$$\begin{cases} \text{(DE)} & w''_{xx}=\frac{1}{4}w''_{tt} \\ \text{(RV)} & w(0,t)=w(2,t)=0 \\ \text{(BV)} & w'_t(x,0)=0, \quad w(x,0)=u(x,0)-S(x)=x-x^2+\frac{x^2}{2}=x-\frac{x^2}{2}. \end{cases}$$

Variabelseparation: Ansätt $w(x,t)=X(x)T(t)\neq 0$, insättning i (DE) ger nu för X & T S-L-problemen: $\frac{X''}{X}=\frac{T''}{4T}=\lambda$.

(I) $\begin{cases} X''=\lambda X \\ X(0)=X(2)=0 \end{cases}$ med $\lambda<0$ har lösn. $X(x)=A\cos\sqrt{-\lambda}\,x+B\sin\sqrt{-\lambda}\,x$,

$X(0)=A=0$, $X(2)=B\sin\sqrt{-\lambda}\,2=0 \Rightarrow$

$\sqrt{-\lambda}\,2=n\pi$; alltså $\underline{\lambda_n=-\frac{n^2\pi^2}{4}}$, $\underline{X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{2}x}$, $n=1,2,\ldots$

För T fås då för varje λ_n problemet $T_n''-4\lambda_nT_n=0$ med lösningar $T_n(t)=C_n\cos(n\pi t)+D_n\sin(n\pi t)$, $w'_t(x,0)=0$ ger $T_n'(0)=n\pi D_n=0$ dvs $D_n=0$. Eftersom (DE), (RV) är homogena, så är även

$$\underline{w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos(n\pi t)\sin\frac{n\pi}{2}x}$$ en lösning. Villkoret

$w(x,0)=x-\frac{x^2}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{2}x$, kan nu uppfyllas genom att välja C_n som Fourierkoefficienten för $x-\frac{1}{2}x^2$ m.a.p. det fullständiga OG-systemet $\{X_n\}_1^{\infty}$, dvs

$$C_n=\frac{1}{M_n}\int_0^2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx=\left\{M_n=\int_0^2\sin^2\frac{n\pi x}{2}dx=1\right\}=[\mathrm{PI}]$$

$$=\left[-\frac{(x-\frac{1}{2}x^2)}{n\pi/2}\cos\frac{n\pi}{2}x+\frac{1-x}{(n\pi/2)^2}\sin\frac{n\pi}{2}x-\frac{1}{(\frac{n\pi}{2})^3}\cos\frac{n\pi}{2}x\right]_0^2$$

$$=\frac{-(-1)^n+1}{(\frac{n\pi}{2})^3}=\begin{cases} 0, & \text{då } n=2k \\ \frac{16}{n^3\pi^3}, & \text{då } n=2k+1 \end{cases}$$

$$u(x,t)=-\frac{x^2}{2}+\frac{16}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos\left((2k+1)\pi t\right)\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}x\right).$$

55. Funktionen $f(x)$ är kontinuerlig och har Fouriertransformen $\hat{f}(\xi) = \dfrac{\ln(1+\xi^2)}{\xi^2}$. Bestäm $f(0)$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

Lösning: Först observera att

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\ln(1+\xi^2)}{\xi^2}; \Rightarrow \hat{f}(0) = \lim_{\xi\to 0} \frac{\ln(1+\xi^2)}{\xi^2} = 1.$$

a $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx$, för $\xi = 0$ får vi

$$\underline{\underline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \hat{f}(0) = 1.}}$$

b $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi$, för $x=0$ fås

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1+\xi^2)}{\xi^2}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+\xi^2)}{\xi^2}\,d\xi = [\text{PI}] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{\xi}\ln(1+\xi^2)\Big|_{\xi=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi}\cdot\frac{2\xi}{1+\xi^2}\,d\xi\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\cancel{\lim_{\xi\to\infty} \frac{\ln(1+\xi^2)}{\xi}}^{\,0} + \lim_{\xi\to 0+} \underbrace{\frac{\ln(1+\xi^2)}{\xi}}_{=\xi\hat{f}(\xi)} + 2\arctan\xi\Big|_{\xi=0}^{\infty}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\lim_{\xi\to 0+} \xi\hat{f}(\xi) + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right\} = 1. \quad \text{Alltså } \underline{\underline{f(0)=1.}}$$

56. Bestäm lösningen $f(t)$, $t>0$, ur integralekvationen

$$\begin{cases} f''(t)-4f'(t)+f(t)+6\int_0^t f(\tau)\,d\tau = 2e^t \\ f(0-)=1, \quad f'(0)=0 \end{cases}$$

Lösning: L-transform $\Rightarrow$

$$s^2F(s)-s\overbrace{f(0-)}^{=1}-\cancel{f'(0-)}^{\,0}-4sF(s)+4\overbrace{f(0-)}^{=1}+F(s)+6\,\frac{F(s)}{s}=\frac{2}{s-1}$$

$$\left(s^2-4s+1+\frac{6}{s}\right)F(s)=s-4+\frac{2}{s-1},$$

$$F(s)=\frac{s-4+\frac{2}{s-1}}{s^2-4s+1+\frac{6}{s}}=\frac{s}{s-1}\cdot\frac{2+(s-1)(s-4)}{s^3-4s^2+s+6}=\{s=-1,2,3 \text{ är rötterna till nämnaren}\}=\frac{s}{s-1}\cdot\frac{s^2-5s+6}{(s+1)(s^2-5s+6)}=\frac{s}{(s-1)(s+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{s+1}.$$

$$f(t)=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}=\cosh(t) \quad \text{för } t\geq 0.$$

57. Låt $u(x,t)$ vara lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad t>0, \quad 0<x<\pi & (DE) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & (RV) \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = g(x). & (BV) \end{cases}$$

Bevisa att för $t>0$

$$\int_0^{\pi} |u_t(x,t)|^2 dx \leq \int_0^{\pi} |g(x)|^2 dx$$

<u>Lösning</u>: Variabelsepartion; sätt $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ i (DE);

$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = \lambda = -\mu^2$, $\mu>0$ ($\lambda = 0 \wedge \lambda > 0$ ger trivial lösn.)

(I) $\begin{cases} X'' + \mu^2 X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} T'' + c^2\mu^2 T = 0 \\ T(0) = 0, \ T'(0) = g(x) \end{cases}$

(I) är S-L-problem med lösningar: $X(x) = A\sin\mu x + B\cos\mu x$

$X(0) = B = 0$, $X(\pi) = A\sin(\mu\pi) = 0 \overset{A\neq 0}{\Longrightarrow} \mu = 1, 2, \dots, (\mu = n > 0)$

egenpar: $\underline{\underline{\lambda_n = -n^2, \ X_n(x) = \sin(nx), \ n \geq 1.}}$

p.s.s. $T_n(t) = P_n \sin(nct) + q_n \cos(nct)$, $T_n(0) = q_n = 0 \Rightarrow$

$\underline{\underline{T_n(t) = P_n \sin(nct).}}$

Superposition ger $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin(nct)\sin(nx)$.

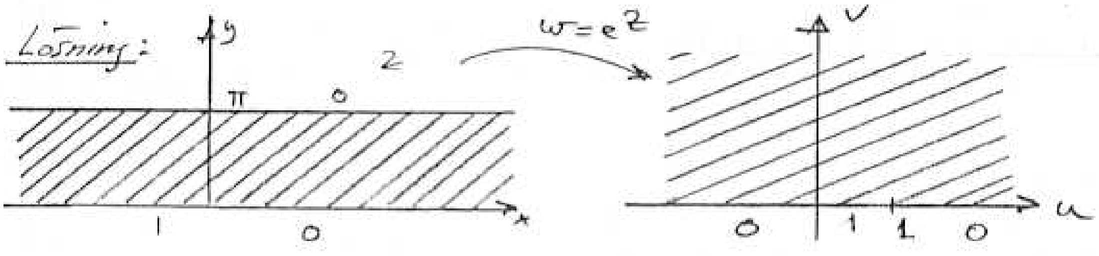
$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} ncP_n \cos nct \sin(nx) \Rightarrow u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} cnP_n \sin nx = g(x)$

$\underline{\underline{\int_0^{\pi} |u_t(x,t)|^2 dx}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |cnP_n|^2 \cos^2(nct) \cdot \frac{\pi}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (cnP_n)^2 \frac{\pi}{2}$

$= \int_0^{\pi} |u_t(x,0)|^2 dx = \underline{\underline{\int_0^{\pi} |g(x)|^2 dx.}}$ ☐

59. Bestäm den elektrostatiska potentialen $\varphi(x,y)$ i området $D=\{(x,y): -\infty<x<\infty,\ 0<y<\pi\}$, om potentialen på randen är
$$\varphi(x,y)=\begin{cases}1 & y=0,\ x<0\\ 0 & y=0,\ x>0\\ 0 & y=\pi\end{cases}$$

Lösning:



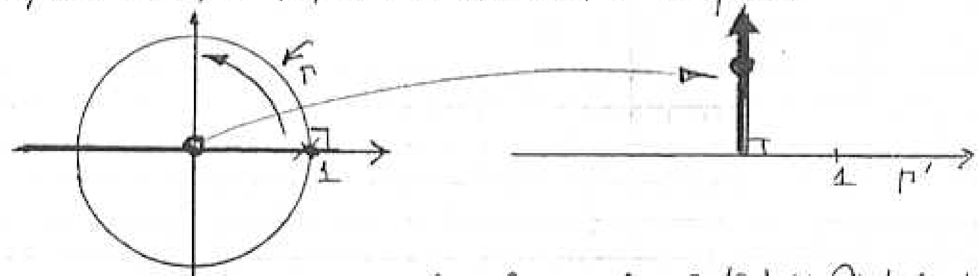
Avbildningen $w=e^z$ avbildar bandet $-\infty<x<\infty,\ 0<y<\pi$ på övre halvplanet. Vi skall nu bestämma en funktion $\Phi(u,v)$, som är harmonisk i halvplanet $v>0$ och uppfyller randvillkoren
$$\Phi(u,0)=\begin{cases}0, & u<0 \wedge u>1\\ 1, & 0<u<1.\end{cases}$$
Funktionen $\Phi(u,v) = C_1 \arg w + C_2 \arg(w-1) + C_3$,
är harmonisk i övre halvplanet, och antar konstanta värden på de tre intervallen $u<0$, $0<u<1$ och $u>1$. Vi väljer argumenten så att $0 \le \arg(\cdot) \le \pi$; vi har $\arg(u+iv) = \operatorname{arccot}\frac{u}{v}$ då $v>0$.
Välj konstanterna C_1, C_2 och C_3 så att dessa värden blir 0, 1, resp. 0:
$$\begin{cases}C_1\pi + C_2\pi + C_3 = 0\\ C_2\pi + C_3 = 1\\ \underline{\underline{C_3=0}}\end{cases} \Rightarrow \quad \underline{\underline{C_1=-\frac{1}{\pi}}},\quad \underline{\underline{C_2=+\frac{1}{\pi}}}$$

Med substitutionen $w=e^z$ får vi då en lösning $\varphi(x,y)$ till det givna problemet. Då
$$w=u+iv = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$
blir alltså lösningen
$$\underline{\underline{\varphi(x,y)}} = \frac{1}{\pi}\Big(\arg(w-1)-\arg(w)\Big) = \frac{1}{\pi}\arg\frac{w-1}{w} = \frac{1}{\pi}\arg\left(1-\frac{1}{w}\right)$$
$$= \frac{1}{\pi}\arg\big(1-e^{-x}(\cos y - i\sin y)\big) = \frac{1}{\pi}\arg\left(1-e^{-x}\cos y + ie^{-x}\sin y\right)$$
$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{1-e^{-x}\cos y}{e^{-x}\sin y} = \underline{\underline{\frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{e^{x}-\cos y}{\sin y}}}.$$

60. Undersök hur avbildningen $w = \frac{i(1-z)}{1+z}$ avbildar enhetscirkeln $|z|=1$ respektive cirkelskivan $|z|<1$. Använd resultatet för att bestämma den elektrostatiska potentialen $\varphi(x,y)$, $(z = x+iy)$ i enhetscirkelskivan $|z|<1$ med randvärdena:

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} P, & \text{om } |z|=1 \quad x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{om } |z|=1, \quad x<0, \text{ eller, } y<0 \end{cases}$$

Lösning: Avbildningen $w = \frac{i(1-z)}{1+z}$ avbildar realaxeln på imaginäraxeln. Punkterna 1 och -1 går på 0 resp. ∞. Cirkeln $|z|=1$ går på en rät linje (en "cirkel" genom ∞), som skär imaginäraxeln vinkelrätt i $w=0$ (konform avb.): $|z|=1 \overset{\text{avb}}{\curvearrowright}$ realaxeln i w-planet



Slutligen eftersom $z=0$ går på $w=i$, så $|z|<1 \curvearrowright$ halvplanet $\operatorname{Im} w>0$.
Då z går från 1 till i längs cirkeln $|z|=1$ i positiv led, går w från 0 till 1, längs realaxeln med växande u (observera att orienteringen bevaras, så att det inre av området ligger t.v.o. kurvan i båda fallen).
Vi ska nu bestämma en funktion $\Phi(u,v)$, som är harmonisk i halvplanet $\operatorname{Im} w>0$ och uppfyller randvillkoren $\Phi(u,v) = \begin{cases} P, & 0<u<1 \\ 0, & u<0 \wedge u>1. \end{cases}$

Funktionen $\underline{\Phi(u,v) = C_1 \arg w + C_2 \arg(w-1) + C_3}$, är harmonisk för $v>0$ och antar konstanta värden på de tre intervallen: $u<0$, $0<u<1$ och $u>1$. Vi väljer $0 \le \arg(\cdot) \le \pi$, vi har $\arg(u+iv) = \operatorname{arccot}\frac{u}{v}$, då $v>0$.
Välj $C_1, C_2 \wedge C_3$ så att de konstanta värdena blir 0, P, resp 0:

$$\begin{cases} C_1\pi + C_2\pi + C_3 = 0 \\ C_2\pi + C_3 = P \\ C_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = -\frac{P}{\pi} \\ C_2 = \frac{P}{\pi} \end{matrix} \Rightarrow \Phi(u,v) = \frac{P}{\pi}\left(\arg(w-1) - \arg(w)\right) = \frac{P}{\pi}\arg\frac{w-1}{w}.$$

Med substitutionen $w = \frac{i(1-z)}{1+z}$ får vi då en lösn. till de givna problemet:

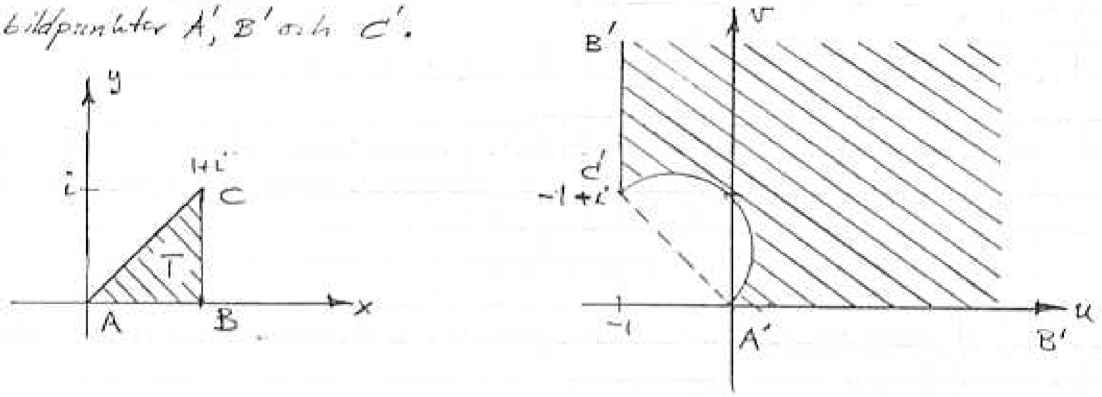
$$\frac{w-1}{w} = \frac{1-z+i(1+z)}{1-z} = \frac{1-(x+iy)+i(1+x+iy)}{1-x-iy} = \dots = \frac{(1-x)^2+y^2-2y+i(1-x^2-y^2)}{(1-x)^2+y^2}$$

$$\underline{\varphi(x,y) = \operatorname{arccot}\frac{(1-x)^2+(1-y)^2-1}{1-x^2-y^2}}.$$

61. Låt T vara triangelområdet med hörn i 0, 1 och $1+i$.

Bestäm bilden av T under avbildningen $w = \frac{z}{1-z}$.

<u>Lösning:</u> Låt hörnpunkterna i T vara A, B och C och motsvarande bildpunkter A', B' och C'.



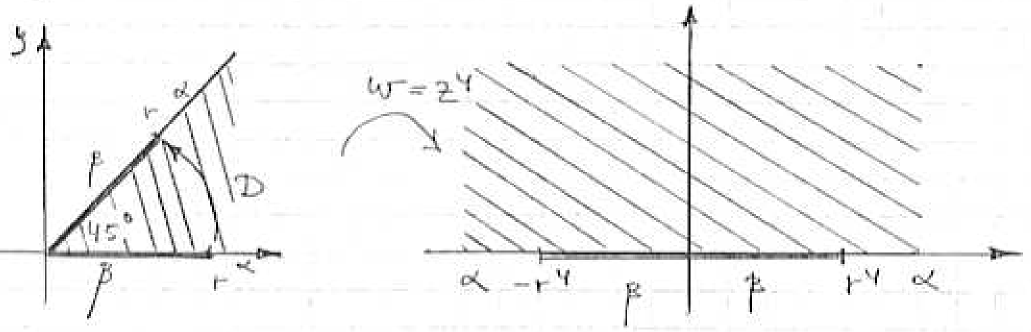
Längs sidan AB är $z = x$, $0 \le x \le 1$, och $w = u + iv = \frac{x}{1-x}$, så att $v = 0$, medan u går från 0 till ∞. $A'B'$ blir alltså positiva realaxeln. Längs BC är $z = 1 + iy$, $0 \le y \le 1$, vilket ger $w = \frac{1+iy}{-iy} = -1 + i\frac{1}{y} = u + iv$. Alltså blir $B'C'$ sträckan utefter $u = -1$ från ∞ till 1. Sidan CA, slutligen måste avbildas på en cirkelbåge (Möbiusavbildning), som går genom $w = -1+i$ och $w = 0$. Cirkelns tangent i $w = -1+i$ bildar vinkeln $45°$ med linjen $u = -1$ (konform avbildning) och cirkelns tangent i $w = 0$ bildar likaså vinkeln $45°$ med realaxeln. Med tanke på orienteringarna (se fig.) finner man att båda tangenterna är vinkelräta mot linjen $u = -v$. Cirkelns medelpunkt ligger alltså på denna linje mitt emellan $-1+i$ och 0, så den är $w = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$. Bildkurvan $C'A'$ är alltså en halvcirkel enligt fig. Bildområdet framgår också av figuren. Uttryckt i formler ges bildområdet av olikheterna:

$$\underline{\underline{v \ge 0, \quad u \ge -1, \quad \left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(v-\frac{1}{2}\right)^2 \ge \frac{1}{2}.}}$$

62. Bestäm den elektrostatiska potentialen $\varphi(x,y)$ i området $D=\{(x,y):\ 0<y<x\}$ om potentialen på randen är

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\alpha, & (x,y)\in\partial D,\quad x^2+y^2>r^2\\ \beta, & (x,y)\in\partial D,\quad x^2+y^2\le r^2\end{cases}$$

Lösning:



Avbildningen $w=z^4$, $z=x+iy$ avbildar D på övre halvplanet. Sätt $w=u+iv$, vi skall nu bestämma en funktion $\Phi(u,v)$, som är harmonisk i halvplanet $v>0$ och uppfyller randvillkoren

$$\Phi(u,v)=\begin{cases}\alpha, & u<-r^4\\ \beta, & -r^4\le u\le r^4\\ \alpha, & r^4<u.\end{cases}$$

Funktionen

$$\Phi(u,v)=C_1\arg(w+r^4)+C_2\arg(w-r^4)+C_3,$$

är harmonisk i övre halvplanet, $v>0$, och antar konstanta värden på de tre intervallen $u<-r^4$, $-r^4\le u\le r^4$ och $u>r^4$ på realaxeln.

Vi väljer argumenten så att $0\le\arg(\cdot)\le\pi$. Vi har $\arg(u+iv)=\operatorname{arccot}\frac{u}{v}$, då $v>0$. Välj konstanterna C_1, C_2 och C_3 så att dessa värden blir α, β respektive α:

$$\begin{cases}C_1\pi+C_2\pi+C_3=\alpha\\ C_2\pi+C_3=\beta\\ C_3=\alpha.\end{cases}\Rightarrow\quad C_1=\frac{\alpha-\beta}{\pi},\quad C_2=-\frac{\alpha-\beta}{\pi}$$

Med substitutionen $w=z^4$ får vi då en lösning $\varphi(x,y)$ till det givna problemet.

Då $w=(u+iv)=(x+iy)^4=(x^2-y^2-2ixy)^2=(x^2-y^2)^2-4x^2y^2+4ixy(x^2-y^2)$

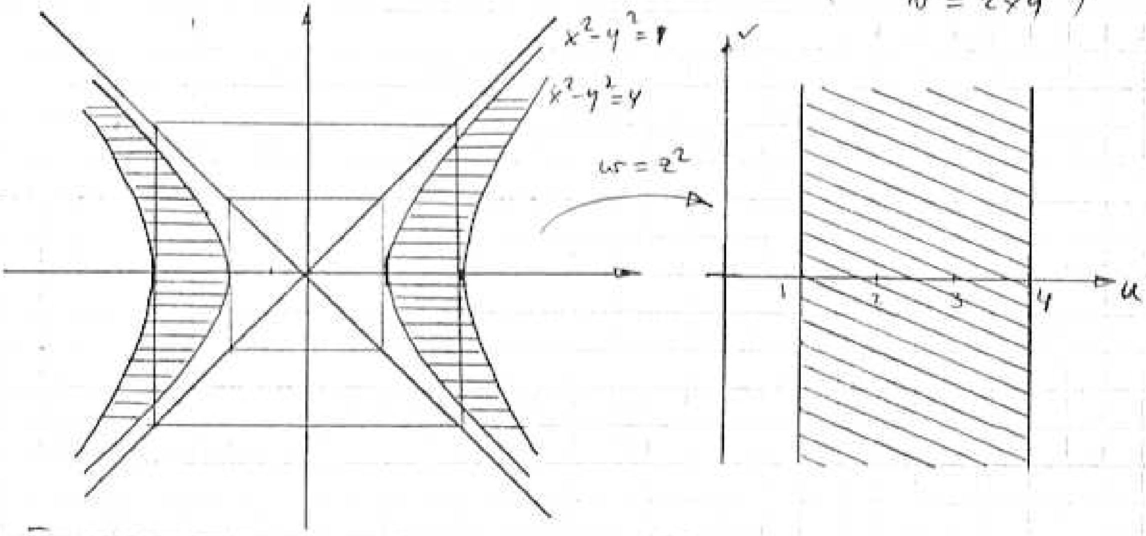
blir alltså lösningen

$$\varphi(x,y)=\alpha+\frac{\alpha-\beta}{\pi}\left[\operatorname{arccot}\frac{(x^2-y^2)^2-4x^2y^2+r^4}{4xy(x^2-y^2)}-\operatorname{arccot}\frac{(x^2-y^2)^2-4x^2y^2-r^4}{4xy(x^2-y^2)}\right].$$

63. Sök en harmonisk funktion $\varphi(x,y)$ i området mellan hyperblerna $x^2-y^2=1$ och $x^2-y^2=4$ med randvärden

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 2xy & \text{på } x^2-y^2=1 \\ 4xy & \text{på } x^2-y^2=4 \end{cases}$$

<u>Lösning</u>: Avbildningen $w = z^2$ eller $u+iv = (x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$, ger bandet mellan $u=1$ och $u=4$.
$$\left(\Longrightarrow \begin{matrix} u = x^2-y^2 \\ v = 2xy \end{matrix}\right)$$



Sök alltså en harmonisk funktion $\Phi(u,v)$ i bandet med randvärden $\phi(1,v)=v$ och $\phi(4,v)=2v$. Man kan ansätta en lösning av formen $\Phi(u,v) = (Au+B)v$, ty detta är en harmonisk funktion och kan anpassas till de rätta randvärdena. Vi skall ha

$$\begin{cases} \Phi(1,v) = (A+B)\,v = v \\ \Phi(4,v) = (4A+B)\,v = 2v \end{cases} \iff \begin{cases} A+B=1 \\ 4A+B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Alltså är $\Phi(u,v) = \frac{1}{3}(u+2)v$, och efter återgång till variablerna x och y fås lösningen

$$\underline{\underline{\varphi(x,y) = \frac{2}{3}\,xy\,(x^2-y^2+2).}}$$

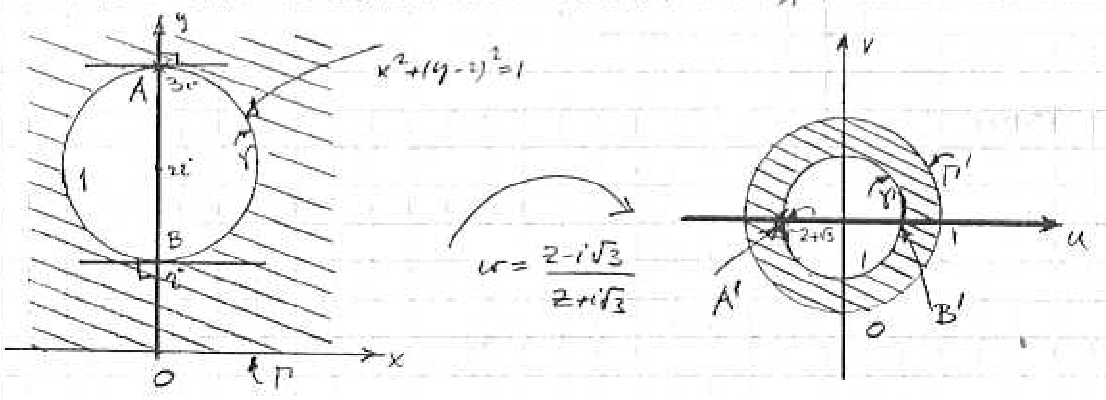
64. Låt Ω vara området mellan cirkeln $x^2+(y-2)^2=1$ och x-axeln.

Betrakta potentialproblemet

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = \varphi_{xx}+\varphi_{yy} = 0 & i\ \Omega \\ \varphi = 0 & \text{på } x\text{-axeln} \\ \varphi = 1 & \text{på cirkeln } x^2+(y-2)^2=1. \end{cases}$$

Visa att avbildningen $w = \frac{z-i\sqrt{3}}{z+i\sqrt{3}}$ $(z=x+iy)$ avbildar Ω på området mellan två cirklar (vilka?). Lös därefter potentialproblemet.

Lösning: Då $z=x$ (reellt) är $|w| = \left|\frac{x-i\sqrt{3}}{x+i\sqrt{3}}\right| = 1$, så att realaxeln i z-planet avbildas på cirkeln $|w|=1$ i w-planet. Då $z=iy$ (y reellt) är w reellt, så imaginäraxeln avbildas på realaxeln. Cirkeln $x^2+(y-2)^2=1$ skär imaginäraxeln vinkelrätt i punkterna $z=i$ och $z=3i$. För $z=i$ fås $w=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = -(2-\sqrt{3})$, och $z=3i$ ger $w=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$. Cirkeln $x^2+(y-2)^2=1$ avbildas alltså på en cirkel som skär realaxeln vinkelrätt i punkterna $\pm(2-\sqrt{3})$. Bildcirkeln blir alltså $|w|=2-\sqrt{3}$. Därmed avbildas det sammanhängande området Ω på området mellan de koncentriska cirklarna $|w|=1$, $|w|=2-\sqrt{3}$.



Vi skall nu bestämma en funktion som är harmonisk i denna cirkelring och som antar värdena 0 och 1 på respektive cirkel. Då randvärdena är konstanta (vinkeloberoende i polära koordinater) beror lösningen enbart på $\rho=|w|$. Funktionen $\ln\rho = \operatorname{Re}\log w$ är harmonisk, så vi kan ansätta lösningen på formen $\varphi = A\ln\rho + B$. Bestäm konstanterna A och B så att randvärdena uppfylls. För $\rho=1$ skall vi ha $\varphi=0$, varför $B=0$. För $\rho=2-\sqrt{3}$ skall vi ha $\varphi=1$, så att $A\ln(2-\sqrt{3})=1$.
Alltså är lösningen

$$\varphi = \frac{\ln|w|}{\ln(2-\sqrt{3})} = \frac{1}{2\ln(2-\sqrt{3})}\ln\frac{|x+i(y-\sqrt{3})|^2}{|x+i(y+\sqrt{3})|^2} = \frac{1}{2\ln(2-\sqrt{3})}\ln\frac{x^2+(y-\sqrt{3})^2}{x^2+(y+\sqrt{3})^2}$$