TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 2004-08-26, lösningar.

1. Enligt satsen 5.3 b, för $a=0$, $b=3$, $\nu=2$, är Besselfunktioner $J_2(\mu_k x/3)=\varphi_k(x)$, $k=1,2,\ldots$ ett fullständigt ortogonalt system på intervallet $(0,3)$ med vikten $w(x)=x$. Man har också

$$\|\varphi_k\|_w^2 = \frac{3^2(\mu_k^2-4)}{2\mu_k^2} J_2(\mu_k)^2$$

Fourier-Bessel koefficienter av $f(x)$ m.a.på $\{\varphi_k\}$ är lika med

$$c_k = \int_0^3 \varphi_k(x) f(x)\, x\, dx \; \|\varphi_k\|_w^{-2}.$$

Vi beräknar integralen i c_k:

$$\int = \int_0^1 x^3 J_2(\mu_k x/3)\, dx = \begin{pmatrix} y = \mu_k x/3 \\ dx = \frac{3}{\mu_k} dy \end{pmatrix} =$$

$$\left(\frac{3}{\mu_k}\right)^4 \int_0^{\mu_k/3} y^3 J_2(y)\, dy = (5.14,\ \nu=3) = \left(\frac{3}{\mu_k}\right)^4 \int_0^{\mu_k/3} \left(y^3 J_3(y)\right)' dy$$

$$= \frac{3}{\mu_k} J_3\left(\frac{\mu_k}{3}\right).$$

Svar: $$c_k = \frac{2\mu_k}{3(\mu_k^2-4)} \frac{J_3\left(\frac{\mu_k}{3}\right)}{J_2(\mu_k)^2}.$$

2. Först använder vi Gram-Schmidt ortogonalisering till polynomsystemet $f_0(x)=1$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=x^2$ på $(0,1)$ med vikten $w(x)=x$:

$$g_0 = f_0,\quad g_1 = f_1 - \frac{\langle f_1, g_0\rangle}{\|g_0\|^2} g_0,\quad g_2 = f_2 - \frac{\langle f_2, g_0\rangle}{\|g_0\|^2} g_0 - \frac{\langle f_2, g_1\rangle}{\|g_1\|^2} g_1.$$

Vi beräknar: $\|f_0\|^2 = \|g_0\|^2 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$,

$$\|f_1\|^2 = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4};\quad \langle f_1, f_0\rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},\ \text{osv.}$$

$$g_1 = x - \frac{2}{3},\quad \|g_1\|^2 = \int_0^1 \left(x-\frac{2}{3}\right)^2 x\, dx = \frac{1}{36}$$

$$\langle f_2, g_0\rangle = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4};\quad \langle f_2, g_1\rangle = \int_0^1 x^2\left(x-\frac{2}{3}\right) x\, dx = \frac{1}{30}$$

$$g_2 = x^2 - \frac{x}{30} + \frac{3}{10};\quad \|g_2\|^2 = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x}{30} + \frac{3}{10}\right)^2 x\, dx \simeq 0.275.$$

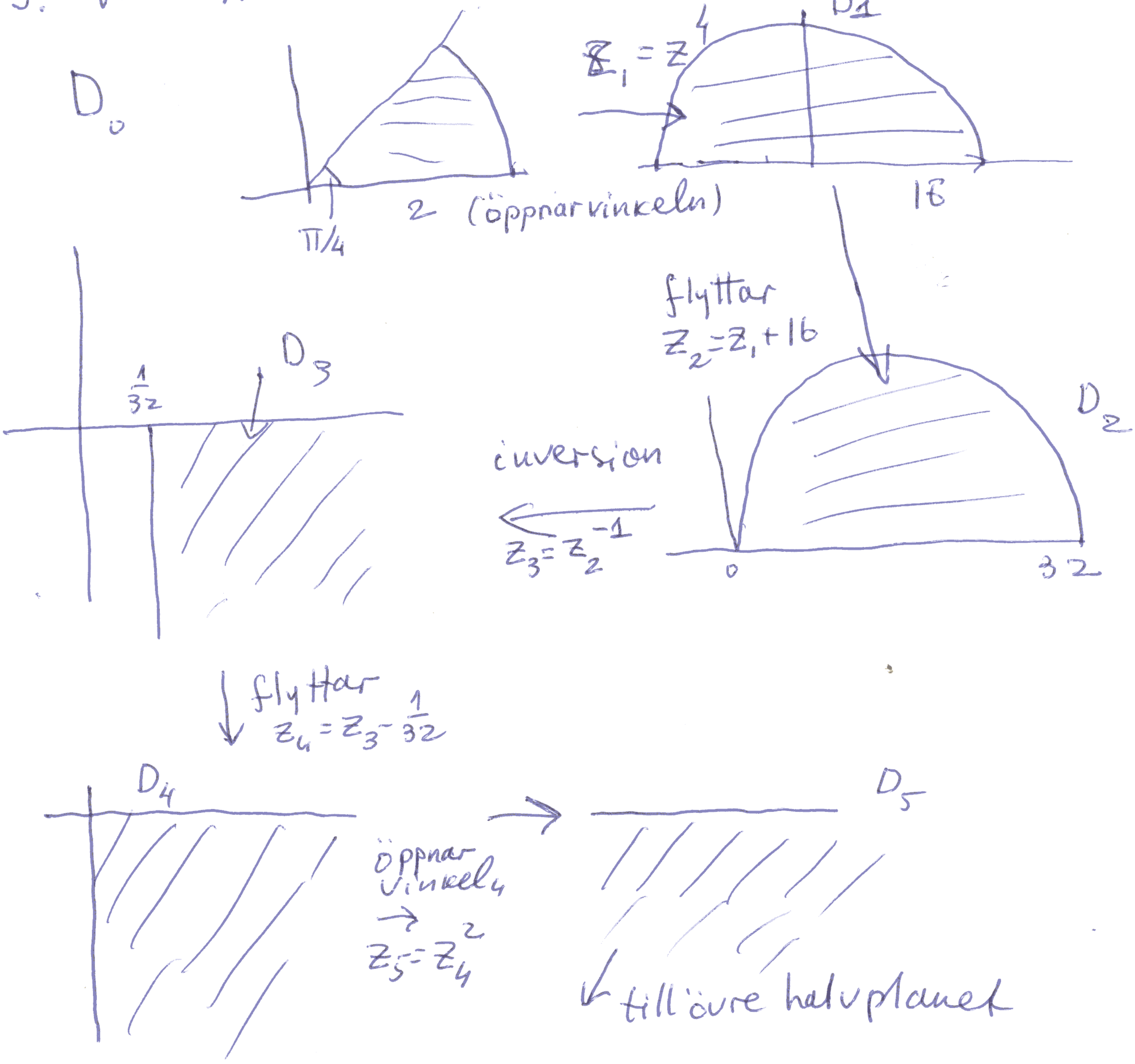
Nu, enligt approximationssatsen, blir bästa approximationspolynomen

$$P = c_0 g_0 + c_1 g_1 + c_2 g_2 , \quad c_k = \frac{1}{\|g_k\|^2} \int_0^1 \sqrt{x}\, g_k\, x\, dx$$

Vi beräknar

$$c_0 = \frac{4}{5}, \quad c_1 \approx 0.17, \quad c_2 \approx 0.65$$

3. Vi konstruerar avbildningen stegvis.



$$w = z_6 = -z_5$$

Sammansättning:

$$w = -z_5 = -z_4^2 = -\left(z_3 - \frac{1}{32}\right)^2$$

$$= -\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{32}\right)^2 = -\left(\frac{1}{z_1+16} - \frac{1}{32}\right)^2 =$$

$$-\left(\frac{1}{z^4+16} - \frac{1}{32}\right)^2.$$

Den konforma avbildningen kan användas för att lösa Dirichletproblemet

$\Delta u = 0$ i D, $u = f$ på gränsen av D.

(4) Funktionen $g_\alpha(t) = \frac{\sin \alpha t}{\pi t}$ har F-transf.

$\hat{g}_\alpha(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \alpha \\ 0, & |\omega| > \alpha \end{cases}$. Enligt Plancherel,

$$h(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} |(g_\alpha * f)(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}_\alpha(\omega)\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^\alpha \hat{f}(\omega)^2 d\omega$. Alltså, för $\alpha < 2$, har vi

$h(\alpha) = 0$; för $2 \le \alpha < 3$, $h(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_2^\alpha d\omega = \frac{\alpha-2}{\pi}$,

för $\alpha \ge 3$, $h(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_2^3 d\omega + \frac{1}{\pi}\int_3^\alpha \frac{1}{\omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)$.

(5) Vi gör F-transformation av ekvationen i x-led, Enligt (5) i tab. 2, får vi

$$\hat{u}_{tt} = (-\xi^2 - 4i\xi + 4)\hat{u}, \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi).$$

Ekvationen har allmäna lösningen

$$\hat{u}(\xi, t) = A(\xi)\, e^{(2-i\xi)t} + B(\xi)\, e^{-(2-i\xi)t}$$

Villkoret att u är begränsad när $t \to \infty$ medföljer $A(\xi) = 0$. $B(\xi)$ hittar från gränsvillkoret, $B(\xi) = \hat{f}(\xi)$

Alltså,

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\, e^{-(2-i\xi)t}$$

$$u(x,t) = e^{-2t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{i\xi t} \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

– den inversa F-transformation.

Enligt (2) i tab. 2, med $c = -t$

$$u(x,t) = e^{-2t} f(x+t).$$

6. Problemet har ohomogena gränsvillkor, därför ett förberedelsesteg krävs. Vi söker en enkel v som satisfierar gränsvillkoren $v(0)=0$, $v'(1)=1$, $v(x) = x$ passar bra. Nu söker vi lösningen i formen $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$. Sätter in i problemet i fål

$$w_{xx} = w_t + w + x, \quad w(0,t) = w_x'(1,t) = 0; \quad w(x,0) = 0.$$

Sturm–Liouville problemet är

$$X'' = KX, \quad x \in (0,1), \quad X(0) = X'(1) = 0.$$

Fall 1: $K < 0$, $K = -\lambda^2$. Allmäna lösningen är $X(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x$. Fr. gränsvillkoret i $x=0$ följer $B=0$. $X' = A\lambda\cos\lambda x$. $X'(1)=0$, $\cos\lambda = 0$,

$$\lambda = \lambda_n = n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, \dots \qquad X_n(x) = \sin\lambda_n t.$$

Fall 2. $K > 0$, $K = \lambda^2$. Allmäna lösningen är

$X(x) = A\sinh\lambda x + B\cosh\lambda x$. $x = 0 \Rightarrow B = 0$. gränsvillkoret i $x=1 \Rightarrow \cosh\lambda = 0$ – inga lösningar.

Alltså $X_n(x) = \sin\lambda_n t$, $\lambda_n = n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n = 0, 1, \dots$ är ett fullständigt ortogonalt system.

Söker lösningen av vårt problem för w som en serie

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) X_n(x).$$

Sätter in i ekvationen:

$$\sum - c_n(t) \lambda_n^2 X_n(x) = \sum c_n'(t) X_n(x) + \sum c_n(t) X_n(x) + X$$

Multiplicerar med $X_k(x)$ och integrerar:
Alla integralen utom $n=k$ försvinner, och
Vi får $\left(\int_0^1 X_k^2 dx = 1/2 \right)$.

$$-\frac{1}{2} c_n(t) \lambda_n^2 = \frac{1}{2} c_n' + \frac{1}{2} c_n + b_n \qquad (*)$$

$$b_n = \int_0^1 x X_k(x) dx = \lambda_n^{-1}$$

ordinära differen. $(*)$ lösas med begynnelsevillkoret
$c_n(0)=0$.

$$c_n = \frac{-2b_n}{\lambda_n^2+1}\left(1 - e^{-(\lambda_n^2+1)t}\right).$$

Svar:

$$u(x,t) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2\lambda_n^{-1}}{\lambda_n^2+1}\left(1-e^{-(\lambda_n^2+1)t}\right) \sin \lambda_n x$$

$$\lambda_n = \pi n + \frac{\pi}{2}.$$