Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa
Telefon:
2006–01–14 kl. 08.30–13.30

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. En lång cylinder har från början temperaturen 0 . Efter tiden $t = 0$ hålls mantelytan vid en periodiskt varierande temperatur. Bestäm temperaturutvecklingen i cylinderns inre. Den beskrivs av följande ekvationer:

$$u_t = \frac{1}{r}(ru_r)_r, \; 0 < r < b, t > 0,$$

   $u(r,t)$ begränsad $u(r,0) = 0, u(b,t) = \sin t, t > 0$.
   (*led: sök lösningen som en serie i Besselfunktioner.*)

2. Låt $F(\xi) = \int_1^5 \arctan(x^3) e^{-i\xi x} dx$. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \cos \xi d\xi$.

3. Med hjälp av konforma avbildningar hitta den elektrostatiska potentialen u i området

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2, \;\; x > 0, 0 < y < x, x^2 + y^2 < 1$$

   som är lika med 0 på x-axeln $y = 0$, lika med 1 på cirkelbågen $x^2 + y^2 = 1$, lika med -1 på linjen $y = x, 0 < x < 1$.

4. Hitta lösningen till randvärdeproblemet

$$u_{xx} + u_{yy} = 1, \, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi,$$

$$u(0,y) = 0, u(\pi,y) = \sin y, u(x,0) = u(x,\pi) = 0.$$

5. Bestäm samtliga egenvärden och tillhörande egenfunktioner till Sturm-Liouvilleproblemet

$$e^{-2x} \frac{d}{dx}(e^{2x} u'(x)) + \lambda u(x) = 0, \; u(0) = 0, u(1) + u'(1) = 0.$$

   Beskriv egenskaper av egenfunktioner. Utveckla funktionen $f(x) = e^x$ i Fourierserie m.a.p. det systemet.

6. Utveckla funktionen $f(\theta) = \sin(\theta/2) + 1$ i en komplex Fourierserie på intervallet $(-\pi, \pi)$. Vilka formler ger serien för $\theta = 0, \pi/2, -\pi/2, -\pi, \pi$? Vilka Fourierutvecklingar får man med integrering av serien?? Med derivering av serien?? Formulera motsvarande regler.

7. Formulera och bevisa Besselolikheten för Fourierserier. I vilket fall gäller ekvation i stället för Besselolikheten.

8. Ortogonala och ortonormala funktionssystem i Hibertrum. Hur transformerar man ett icke-ortogonalt system funktioner till ett ortonormalt system? Vad betyder att ett system är en bas?

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas måndagen, den 28. jan. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 16.jan.
G.Rozenblioum