

MVE030 Fourieranalys F2/Kf2, 4 p.; TMA132, 5p.

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

Skriv kurskoden på omslaget

1. Med hjälp av utveckling i Fourier-Bessel serie hitta en lösning $u(r, \theta, t)$ av randvärdeproblem för värmeekvationen

$$u_t = \Delta u$$

i cirkelskivan $r < 1$ med randvillkoret $u(1, \theta, 0) = \sin(2\theta)$ och begynnelsevillkoret $u(r, \theta, 0) = 0$. *Led: Efter förberedelsesteget sök lösningen som $s(r, t) \sin(2\theta)$ och använd Fouriermetoden till ekvationen för $s(r, t)$.*

2. Formulera satsen om den bästa approximationen. Hitta C_0, C_1, C_2 så att integralen $\int_0^1 |e^{3x} - C_0 - C_1 e^x - C_2 e^{2x}|^2 dx$ minimeras. *OBS!! Glöm inte om Gram-Schmidt!!*
3. Utveckla i en komplex Fourier serie på intervallet $(-\pi, \pi)$ funktionen $f(\theta) = 0, \theta < 0, f(\theta) = \theta^2, \theta \geq 0$. Vilken Fourierserie får man vid integrering av den serien? Hitta summan av kvadrater av absolutvärden av koefficienter i integrerade serien?
4. Lös med hjälp av utvecklingen i Fourier serie i egenfunktioner av ett passande Sturm-Liouville problem vågekvationen

$$u_{tt} = u_{xx} + 3u_x, 0 < x < 1, t > 0$$

med randvillkoren $u(0, t) = 0, u(1, t) = 1$ och begynnelsevillkoren $u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0$. (Tips: skriv $u_{xx} + 3u_x$ som $e^{-3x}(e^{3x}u_x)_x$ för att få S-L problemet och bestäma viktfunktionen.)

5. Låt $f(x) = (x^2 + 1)^{-1} e^{ix} + 2x^{-1} \sin(2x)$. Hitta med hjälp av Fouriertransform $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-5ix} dx$.
6. Bestäm en lösning $y(x)$ med perioden 5 av ekvationen $y'' - y' + 3y = f(x)$ där $f(x) = 0, 0 < x < 1, f(x) = e^x, 1 \leq x \leq 5$ och $f(x)$ är periodisk med perioden 5.
ALTERNATIVT FÖR TMA132 Hitta en harmonisk funktion i halvbandet $x > 1, 0 < y < 1$, med randvärdena $u(1, y) = 0, u(x, 0) = 2, 1 < x < 4; u(x, 0) = 4, x > 4; u(x, 1) = -1$.
7. Berätta så mycket du kan om linjära dynamiska system, deras egenskaper, karakteristiker och Fouriertransformationsbaserade analysmetoder. Ge exempel.
8. Ge definition av Legendrepolymer, formulera huvudegenskaper, beskriv var de används, och bevisa ortogonalitet.
ALTERNATIVT FÖR TMA132 Konformavbildningar och ström. Nivåkurvor.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdiggrättas måndagen, den 15. mars. Lösningförslag publiceras på kursens webbsida 5. mars.

G.Rozenblioum