Lösningar 2006-03-04

MVE030 / TMA 132 Fourieranalys F/Kf

1. Randvillkoren är ohomogena, därför krävs förberedelsesteget:

$v(r,\theta,t)$: $v(1,\theta,t) = \sin 2\theta$. tar $v(r,\theta,t) = r^2 \sin 2\theta$

$u = v + w$. För w får ekvationen

$$\begin{cases} w_t = \Delta w + \Delta v = w_{rr} + r^{-1} w_r + r^{-2} w_{\theta\theta} + 2\sin 2\theta \\ \quad + 2\sin 2\theta - 4\sin 2\theta = w_{rr} + r^{-1} w + r^{-2} w_{\theta\theta} ; \\ w(r,\theta,0) = -r^2 \sin(2\theta); \; w(1,\theta,t) = 0 \end{cases}$$

Söker lösningen som $w(r,\theta,t) = S(r,t)\sin 2\theta$. Sätter in i ekvationen och förkortar med $\sin 2\theta$:

$$\begin{cases} S_t = S_{rr} + r^{-1} S_r - 4S \\ S(r,0) = -r^2, \; S(1,t) = 0 \end{cases}$$

Delar variabler! $S(r,t) = R(r)T(t)$:

$$\frac{T'}{T} = \frac{R_{rr} + r^{-1} R_r - 4Rr^{-2}}{R} = -\mu^2$$

för R får vi S-L problemet

$$R_{rr} + r^{-1} R_r - 4r^{-2} R + \mu^2 R = 0 \; ; \; R(1) = 0$$

Det är Besselekvation med $\nu = 2$.

Egenfunktioner är $R_n(r) = J_2(\lambda_n r)$, λ_n är nollställen av J_2. Normer är

$\| R_n(r) \|_w^2 = \frac{1}{2} J_3(\lambda_n)$. Egenvärden är $\mu_n^2 = \lambda_n^2$.

Söker lösningen till problemet som

$$S(r,t) = \sum T_n(t) R_n(r)$$

Sätter in i ekvationen och begynnelsevillkoren; efter multiplikation med $R_m(r)r$ och integrering:

$$T_m'(t) + \mu_m T_m(t) = 0 ;$$

$$T_m(0) = \frac{-1}{\|R_m(r)\|_W^2} \int_0^1 r^2 J_2(\lambda_m r) r\,dr$$

$$= \frac{-2}{J_3(\lambda_m)} \cdot \lambda_m^{-4} \int_0^{\lambda_m} s^3 J_2(s)\,ds =$$

$$\frac{-2}{\lambda_m^4 J_3(\lambda_m)} \int_0^{\lambda_m} \left(s^3 J_3(s)\right)' ds = \frac{-2}{\lambda_m}.$$

Samlar det hela:

$$u(r,\theta,t) = r^2 \sin 2\theta + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda_m t} \cdot \frac{-2}{\lambda_m} J_2(\lambda_m r) \times \sin 2\theta.$$

2. funktioner $1, e^x, e^{2x}$ är inte ortogonala, därför måste man ortogonalisera dem meg Gram-Schmidt. med vikten 1, på intervallet $(0,1)$.

$f_0 = 1, \quad f_1 = e^x, \quad f_2 = e^{2x};$

$$g_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|} = 1; \quad g_1 = \frac{f_1 - \langle f_1, g_0\rangle g_0}{\|f_1 - \langle f_1, g_0\rangle g_0\|}$$

$$\langle f_1, g_0\rangle = \int_0^1 e^x\,dx = e - 1 \doteq 1.71$$

$$f_1 - \langle f_1, g_0\rangle g_0 = e^x - e + 1 \doteq e^x - 1.71$$

$$\|f_1 - \langle f_1, g_0\rangle g_0\|^2 = \int_0^1 (e^x - (e-1))^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}(e^2-1) - (e-1)^2 = \frac{1}{2}(3-e)(e-1) = 0.27$$

$$\|f_1 - \langle f_1, g_0\rangle g_0\| = \sqrt{0.27} = 0.52$$

$$g_1 = 1.91\,e^x - 3.26;$$

$$g_2 = \frac{f_2 - \langle f_2, g_0\rangle g_0 - \langle f_2, g_1\rangle g_1}{\|f_2 - \langle f_2, g_0\rangle g_0 - \langle f_2, g_1\rangle g_1\|}$$

$$= \frac{e^{2x} - 3.19 - 1.26\,(1.91e^x - 3.26)}{\|e^{2x} - 3.19 - 1.26\,(1.91e^x - 3.26)\|}$$

$$= \frac{e^{2x} - 2.41e^x + 0.92}{\|e^{2x} - 2.41e^x + 0.92\|^2} = 0.83e^{2x} - 2e^x + 0.76$$

Beräknar F-koefficienter:

$$\langle e^{3x}, g_0 \rangle = \int_0^1 e^{3x}\,dx = 6.36$$

$$\langle e^{3x}, g_1 \rangle = \int_0^1 \left(e^{4x} \cdot 1.91 - 3.26 e^{3x}\right) dx$$

$$= 1.91 \frac{e^4-1}{4} - 3.26 \frac{e^3-1}{3} = 4.91$$

$$\langle e^{3x}, g_2 \rangle = \int_0^1 0.83 e^{5x} - 2 e^{4x} + 0.76 e^{3x}\,dx$$

$$= 0.83 \frac{e^5-1}{5} - 2 \frac{e^4-1}{4} + 0.76 \frac{e^3-1}{3} = 2.5$$

Svar: approximerande funktionen är

$$c_0 + c_1 e^x + c_2 e^{2x} = 6.26 + 4.91(1.91 e^x - 3.26)$$
$$+ 2.5(0.83 e^{2x} - 2e^x + 0.7).$$

3. Utvecklingen har formen

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \theta^2 e^{-in\theta} d\theta$$

Efter 2 partiellintegreringar, får man

$$C_0 = \frac{\pi^2}{6}$$

$$C_n = \frac{2}{n^2}(-1)^n + i\left(\frac{\pi}{2n}(-1)^n \cancel{-} \frac{1}{\pi n^3}((-1)^n - 1)\right).$$

Efter integreringen får man F-serie för $F(\theta) = \int_0^{\theta} \varphi^2 d\varphi$, $\theta > 0$, $F(\theta) = \frac{\theta^3}{3}$

$F(\theta) = 0$, $\theta < 0$

Eftersom $c_0 = \frac{\pi^2}{6} \neq 0$, blir integrerade serie:

$$\frac{\theta^3}{3} - \frac{\pi^2}{6}\theta = C_0 + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{in}\left(\frac{2}{n^2}(-1)^n\right)$$

$$+ \left(\frac{\pi}{2n^2}(-1)^n - \frac{1}{\pi n^4}((-1)^n - 1)\right)$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\theta^3}{3} - \frac{\pi^2}{6}\theta\right) d\theta = \frac{\pi^3}{72}.$$

Enligt Parceval,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\theta^3}{3} - \frac{\pi^2\theta}{6}\right)^2 d\theta = 2\pi\left(|C_0|^2 + \sum_{n\neq 0}|C_n|^2\right) =$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{\pi^3}{72}\right)^2 + 2\pi \sum \frac{4}{n^6} + 2\pi \sum \cdot$$

$$\left(\frac{\pi}{2n^2} (-1)^n + \frac{1}{\pi n^4}\left((-1)^n - 1\right)\right)^2 .$$

4. Förberedelsesteget:
$v(0,t)=0$, $v(1,t)=1$, tar $v(x,t)=x$.
Ekvationen transformeras till: $u=v+w$

$$w_{tt}=w_{xx}+3w+3$$
$$w(0,t)=w(1,t)=0, \quad w(x,0)=-x \quad ; \quad w_t(x,0)=0$$

Söker S-L problemet:
$w(x,t)=X(x)T(t)$. för X efter variabelseparat.

$$X''+3X'+\lambda X=0, \quad X(0)=X(1)=0$$

Det är inte S-L problemet. ~~Kr~~ ~~ev~~ ~~ä~~
Vi transformerar till
$$(e^{3x}X')'+e^{3x}\lambda X=0$$; SL problem med vikten e^{3x}.

Söker egenfunktioner. Karakt. ekvationen är $k^2+3k+\lambda$, $k_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{9-4\lambda}}{2}$.

Allmäna lösningen $X(x)=Pe^{k_1x}+Qe^{k_2x}$, som är bekvämt att skriva som

$$X(x)=e^{-3/2x}\left(A\sin\frac{\sqrt{4\lambda-9}}{2}x+B\cos\frac{\sqrt{4\lambda-9}}{2}x\right)$$

sätter in i randvillkoren och får $B=0$,

$$\frac{\sqrt{4\lambda-9}}{2}=n\pi, \quad n=1,2,\ldots$$

$$\lambda_n=n^2\pi^2+\frac{9}{4}$$

$X_n=A\sin(n\pi x)e^{-\frac{3}{2}x}$; A hittar vi ur normaliserinsvillkoren: $\int_0^1 X^2e^{3x}dx=1$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$X_n=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3x}{2}}\sin(n\pi x).$$

Söker lösningen i formen av F-serie

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

Sätter in i ekvationen och använder S-L problemet

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T_n'' + \lambda_n T_n) X_n(x) = 3$$

multiplicerar med $X_m(x) e^{3x}$ och integrerar:

$$(T_m'' + \lambda_m T_m) = 3 \int_0^1 X_m(x) e^{3x} dx.$$

betecknar uttrycket till höger med C_m

Begynnelsevillkoren för T-ekv. får ur begynnelsevillkoren för w:

$$\sum_1 T_n(0) X_n(x) = -x \Rightarrow T_m(0) = -\int_0^1 X_n(x) x \, dx = D_n.$$

$$\sum_1^{\infty} T_n'(0) X_n(x) = 0 \Rightarrow T_m'(0) = 0.$$

Lösningen till ekvationen

$$T_m'' + \lambda_m T_m = C_m \; ; \; T_m(0) = D_m, \; T_m'(0) = 0$$

Allm. lösningen till homogena ekv.

$$T_m = A \sin\sqrt{\lambda_m}\, t + B \cos\sqrt{\lambda_m}\, t$$

Partikul. lösningen för ohomogena ekv. (höger leden t-oberoende)

$$T_{m,part.} = -\frac{C_m}{\lambda_m}.$$

Anpassar koeff. A, B för att uppfylla begynnelsevillk: $A = 0$,

$$B = D_m - \frac{C_m}{\lambda_m}.$$

Sätter in i formeln för $w(x,t)$ och lägger till $v(x,t)$.

5. Beräknar F-transform av $f(x)$.

$$\mathcal{F}\left((x^2+1)^{-1}\right) = e^{-|\xi|}$$

$$\mathcal{F}\left((x^2+1)^{-1} e^{ix}\right) = e^{-|\xi-1|}$$

$$\mathcal{F}\left(2x^{-1}\sin(2x)\right) = 2\pi\chi_2(\xi) = \begin{cases} 2\pi, & |\xi|<2 \\ 0, & |\xi|>2 \end{cases}$$

Använder Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-|\xi-1|} + 2\pi\chi_2(\xi)\right|^2 dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|\xi-1|} d\xi + \frac{1}{2\pi}\cdot 2\cdot 2\pi \int_{-2}^{2} e^{-|\xi-1|} d\xi + 4\pi\int_{-2}^{2} d\xi =$$

$$\frac{1}{\pi} + 2\left(e^{3} + e - 2\right) + 4\pi.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-5ix}dx = \hat{f}(5) = e^{-4}.$$

6. ~~Vi använder F~~

Vi söker y som en F-serie med periodeu 5:

$$y(x) = \sum c_n e^{inx\frac{2\pi}{5}}$$

Sätter in i ekvationen:

$$\sum \left(c_n \left(in\frac{2\pi}{5}\right)^2 - c_n\left(in\frac{2\pi}{5}\right) + 3c_n\right) e^{inx\frac{2\pi}{5}}$$

$$= f(x).$$

Det betyder att talen $c_n\left(-n^2\frac{4\pi^2}{25}+3-in\frac{2\pi}{5}\right)$ är F-koeff. av $f(x)$, därför är de lika med

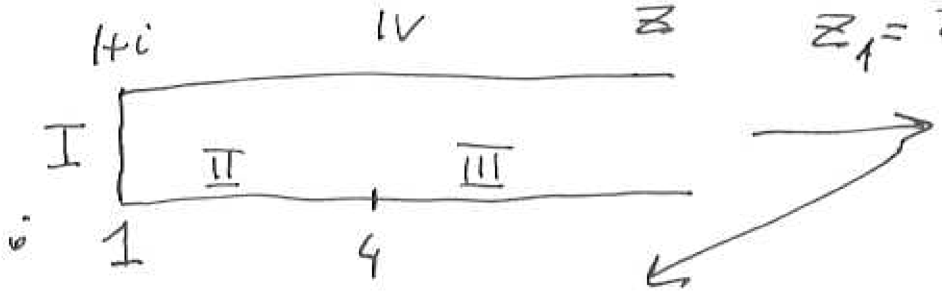
$$\frac{1}{5}\int_0^5 f(x)\, e^{-inx\frac{2\pi}{5}}\, dx =$$

$$\frac{1}{5}\int_1^5 e^x e^{-inx\frac{2\pi}{5}} dx = \frac{1}{5}\frac{\left(e^{5} - e^{1-in\frac{2\pi}{5}}\right)}{1-i\frac{2\pi}{5}} = d_n$$

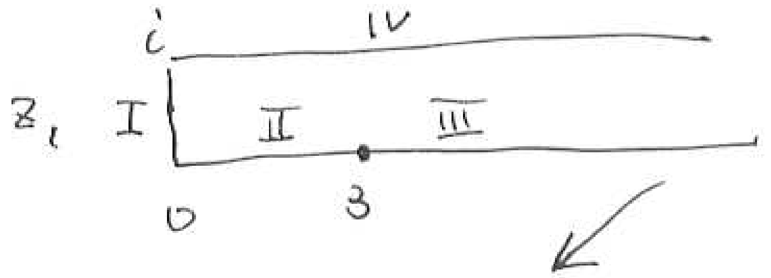
$$c_n = \frac{d_n}{-n^2\cdot\frac{4\pi^2}{25}+3-in\frac{2\pi}{5}},$$

6 (TMA 132)

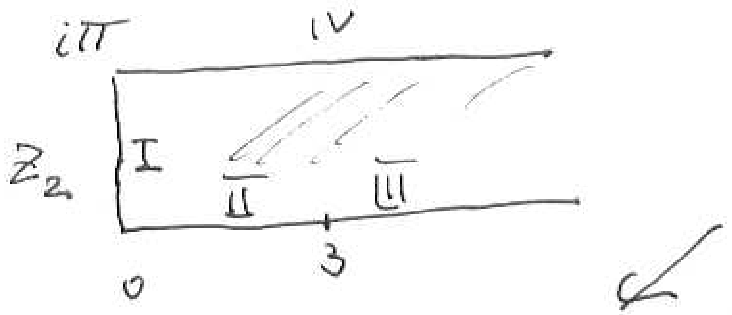
Vi gör en konformavbildning av halvbandet på övre halvplanet. Vi måste anmärka vad som händer med 4 delar av gränsen där randvillkoren är angivna.



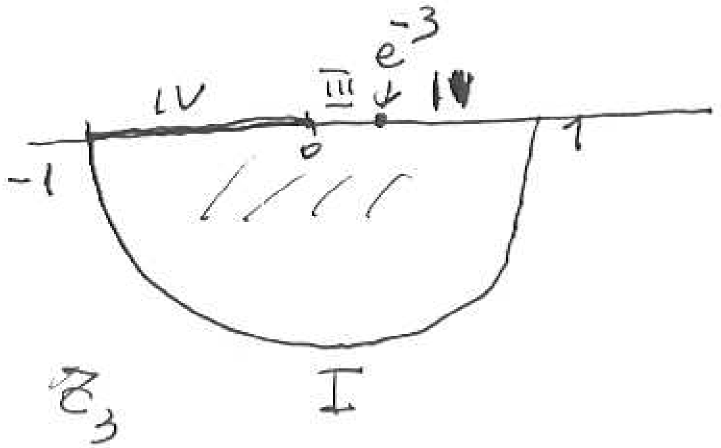
$z_1 = z_2 - 1$



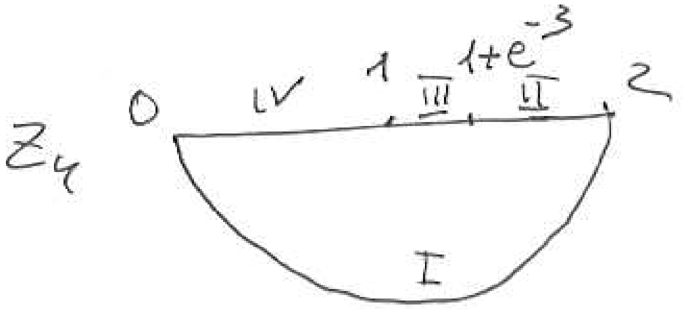
$z_2 = \pi z_1$



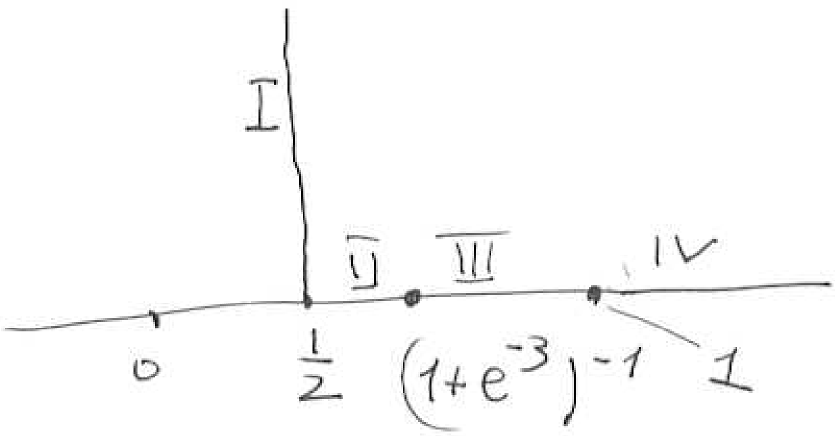
$z_3 = e^{-z_2}$



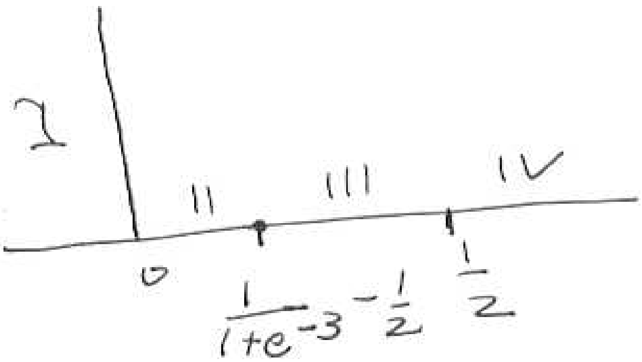
$z_4 = z_3 + 1$



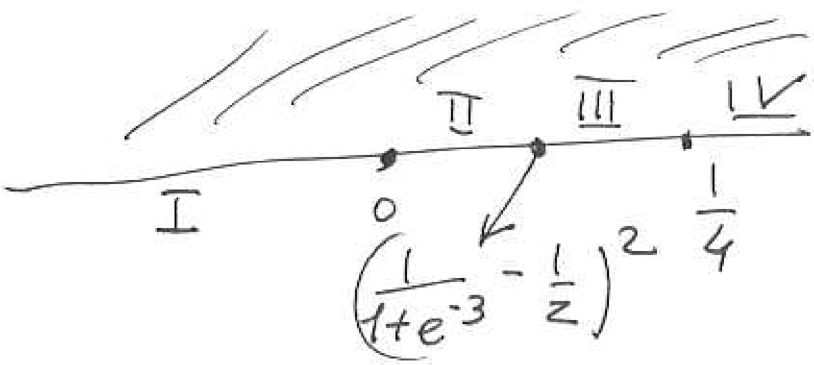
$\to z_5 = \frac{1}{z_4}$



$\to z_6 = z_5 - \frac{1}{2}$



$\to w = z_6^2$



betecknar

$$\left(\frac{1}{1+e^{3}} - \frac{1}{2}\right)^2 = \rho$$

Söker lösningen i formen

$$V(w) = A\arg(w) + B\arg(w-p) + C\arg(w-\tfrac{1}{4}) + D$$

På intervall I;

$$\pi(A+B+C+D) = 0$$

På intervall II:

$$\pi(B+C+D) = 2$$

På intervall III

$$\pi(C+D) = 4$$

På intervall 4

$$\pi D = -1$$

Löser systemet.

$D = -\frac{1}{\pi}$

$C = \frac{5}{\pi}$

$B = -\frac{2}{\pi}$

$A = -\frac{2}{\pi}$

Svar!

$$u(z) = v(w(z))$$

$w(z)$ är komposition av alla konforma delavbildningar!

$$w = z_6^2 = (z_5 - \tfrac{1}{2})^2 = \left(\frac{1}{z_4} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{z_3+1} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{e^{-z_2}+1} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{e^{-\pi(z-1)}} - \frac{1}{2}\right)^2.$$