MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Hjälpmedel: Beta, Standard Math. Tables, typgodkänd räknedosa
Telefon: Elisabeth Wulcan 0762-721860
2006–08–31 kl. 08.30–13.30

Fourieranalys F2/Kf2, MVE030, 4 poäng TMA132,5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer, kurskod samt linje och inskrivningsår.

---

1. Med hjälp av utveckling i Fourier-Bessel serie hitta en radial lösning $u(r,t)$ av randvärdeproblem för värmeekvationen $u_t = 4\Delta u$ i cirkelskivan $r < 1$ med begynnelsevillkoret $u(r,0) = r^2$ och randvillkoret $u(r,t) = 1$ för $r = 1$.

2. a) **MVE030** Bevisa att andraderivatan av $(x^2-1)^{n+1}$ är lika med $2(n+1)(2n+1)(x^2-1)^n + 4n(n+1)(x^2-1)^{n-1}]$. Med hjälp av detta och definitionen av Legendrepolynomer bevisa att $P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1)P_n$. Med hjälp av den sista formeln utveckla i serie i Legendrepolynomer funktionen $f(x)$: $f(x) = x, x \in (0,1), f(x) = 0, x \in (-1,0]$. (Värdet av $P_n(0)$ tas ur BETA).

   b) **TMA132** Med hjälp av konforma avbildningar hitta den elektrostatiska potentialen u i området $(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x > 0, y \in (0,1)$ som är lika med 0 på y-axeln $x = 0$, lika med 1 på linjen $y = 1$, lika med -1 på intervallet $0 < x < 1$ på x-axeln, och lika med 0 för $x > 1$ på x-axeln.

3. Med hjälp av Fouriertransformation hitta lösningen till ekvationen $u_{xx} + u_{yy} - 2u = 0$ i halvbandet $x > 0, y \in (0,1)$ med randvillkoren $u_x(0,y) = u_y(x,0) = 0,\ u(x,1) = 1, x < c, u(x,1) = 0, x > c$. Svaret ges i formen av en Fourierintegral.

4. Lös med hjälp av utvecklingen i Fourier serie i egenfunktioner av ett passande Sturm-Liouville problem vågekvationen

$$u_{tt} = u_{xx} + u, 0 < x < \pi, t > 0$$

   med randvillkoren $u(0,t) = 0, u_x(\pi,t) = 1$ och begynnelsevillkoren $u(x,0) = x^2/2,\ u_t(x,0) = 0$.

5. Formulera integreringsregeln för Fourierserier. Med hjälp av den regeln och F-serien för $f(\theta) = \theta^2, \theta \in (-\pi,\pi)$ (ur BETA) bevisa att

$$\theta^4 - 2\pi^2\theta^2 = 48\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}\cos(n\theta)}{n^4} - \frac{7\pi^4}{15}$$

   för $\theta \in (-\pi,\pi)$. Hitta summan av serien för $\theta = 4\pi$.

6. Lös Laplaceekvationen $u_{xx} + u_{yy} = 0$ i rektangeln $x \in (0,\pi), y \in (0,2\pi)$ med randvillkoren $u(x,0) = \sin x - 2\sin(2x) + 3\sin(3x), x \in (0,\pi)$, $u = 0$ på resten av randen. Använd F-serie i x-led.

7. a) **MVE030** Låt $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ vara ett ortonormalt system i $L^2(a,b)$. Ange tre villkor som alla var för sig är ekvivalent med att $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ är ett fullständigt system (en bas) i $L^2(a,b)$ (Sats 3.4). Beviset krävs. Ge exempel på ortonormala system vilka är en bas, och vilka inte är bas. Vilka system är ortogonala på hela axeln, på halvaxeln??

   b) **TMA132** Berätta så mycket som du kan om strömproblem och om tillämpningen av konforma avbildningar för att lösa dem.

8. Berätta så mycket som du kan om relationer mellan egenskaper av funktionen och egenskaper av dennes Fourierserie.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas måndagen, den 11. sept. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 31.aug.