

**MVE030 Fourieranalys F2/Kf2, 4 poäng (TMA132,5p.)**

OBS! Ange namn, personnummer, kurskod samt linje och inskrivningsår.

---

1. Med hjälp av utveckling i Fourier-Bessel serie hitta en radial lösning  $u(r, t)$  av randvärdeproblem för värmeekvationen

$$u_t = \Delta u - u$$

i cirkelskivan  $r < 3$  med begynnelsevillkoret  $u(r, 0) = 9 - r^2, 1 \leq r \leq 3$ ,  $u(r, 0) = 8, r < 1$  och randvillkoret  $u(r, t) = 0$  för  $r = 3$ .

2. Hitta andragradpolynomet  $P(x)$  som minimerar  $\int_0^2 |x^3 - P(x)|^2 x dx$ .
3. Med hjälp av Fourierserier hitta en lösning med period 4 till differentialekvationen  $y''' - 3y'' + y = f(t)$ , där  $f(t) = t^2, 0 < t < 2, f(t) = e^{-t}, 2 < t < 4$  och  $f$  är en funktion med perioden 4.
4. Funktionen  $f$  definieras av  $f(x) = \int_0^\pi e^{ix\xi} \sqrt{\sin \xi} d\xi$ . Beräkna

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx; \quad (b) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx; \quad (c) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{5ix} dx,$$

där  $\hat{g}(\xi) = \xi^{-\frac{1}{3}}$  för  $\xi \in (0, 1)$ ,  $g = 0$  utanför  $(0, 1)$ .

5. Lös Laplaceekvationen  $\Delta u = 0$  i rektangeln  $x \in (0, \pi), y \in (0, 2\pi)$  med randvillkoren  $u(x, 0) = \sin x, u(x, 2\pi) = 0, u(0, y) = \sin(2y), u(\pi, y) = 0$ .
6. **för MVE030:** Hitta, m.h.a. Fouriertransformation, en begränsad lösning till Cauchyproblemet

$$u_{tt} = u_{xx} + 2u_x + u; t > 0, x \in \mathbb{R}; u(x, 0) = f(x); f \in L^1, \hat{f} \in L^1;$$

**för TMA132:** Bestäm m.h.a. konforma avbildningar lösningen till Laplaceekvationen  $\Delta u = 0$  i halvplanet  $y > 0$  med randvillkoren  $u(x, 0) = 1, 1 < x < 2, u(x, 0) = -1, 2 < x < 5, x = 0, x > 5, u_y = 0, x < 1$ . **Led:** Transformera först halvplanet till ett kvartplan med Neumann randvillkoret på  $y$ -axeln och använd symmetri för att bli av med Neumann randvillkoret.

7. **för MVE030:** Vad är ett Sturm-Liouville problem? Vilka S-L problem kallas för reguljära, singulära? Ge exempel. Berätta så mycket du kan om egenskaper av egenfunktioner och egenvärden.  
**för TMA132:** Berätta så mycket du kan om tillämpningar av analytiska funktioner och konforma avbildningar i hydrodynamik.

8. Berätta så mycket du kan om Legendrepolymer, deras egenskaper och tillämpningar. Det blir bättre om några bevis finns.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas måndagen, den 29. jan. Lösningförslag publiceras 22.jan på kursens webbsida av året 05/06.

G.Rozenblioum

GR