MVE030 / TMA132, Tenta 2007-01-20

Lösningar.

① . $u_t = \Delta u - u$, $r < 3$. Söker element. lösn.

$u(x,t) = R(r)\,T(t)$. Sätter in och separerar variabler.

$$\frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = \frac{R''(r) + r^{-1}R'(r)}{R(r)} = -\mu^2$$

$R'' + r^{-1}R'(r) + \mu^2 R(r) = 0$ – Besselekvation

lösning: $R(r) = J_0(\mu r)$. Randvillkoret

$J_0(3\mu) = 0$; $3\mu = \lambda_n$ – nollställe till J_0.

$\mu_n = \frac{\lambda_n}{3}$; $R_n(r) = J_0\left(\frac{\lambda_n}{3} r\right)$.

T-ekvation: $T' = -(1+\mu^2)T = -\left(1+\left(\frac{\lambda_n}{3}\right)^2\right)T$

$T_n = c_n \exp\left(-\left(1+\left(\frac{\lambda_n}{3}\right)^2\right)t\right)$.

Lösningen med beg. villkor:

$$u = \sum c_n J_0\left(\frac{\lambda_n}{3} r\right) \exp\left(-\left(1+\left(\frac{\lambda_n}{3}\right)^2\right)t\right).$$

$t=0$: $\sum c_n J_0\left(\frac{\lambda_n}{3} r\right) = \varphi(r) = \begin{cases} 9-r^2, & 1 \le r \le 3 \\ 8 & r < 1 \end{cases}$

multiplicerar med $J_0\left(\frac{\lambda_k}{3} r\right)$, integrerar:

$$c_n = \frac{1}{\|J_0\left(\frac{\lambda_n}{3} r\right)\|^2}\left[\int_0^1 8r\,J_0\left(\frac{\lambda_n}{3} r\right)dr + \int_1^3 (9-r^2)\,J_0\left(\frac{\lambda_n}{3} r\right) r\,dr\right],$$

Integraler beräknas med hjälp av rekurrenta formler.

2. Vi tar funktioner $f_0 = 1$, $f_1 = x$, $f_2 = x^2$ och ortogonaliserar enligt Gram-Schmidt på intervallet $(0,2)$ med viktfunktion x.

$$\|f_0\|^2 = \int_0^2 1^2 x\,dx = 2\,; \quad \varphi_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,;$$

$$\langle f_1, \varphi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 x \cdot x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3\sqrt{2}}$$

$$f_1 - \langle f_1, \varphi_0\rangle \varphi_0 = x - \frac{4}{3}$$

$$\varphi_1 = \frac{x - \frac{4}{3}}{\|x - \frac{4}{3}\|} = \frac{x - \frac{4}{3}}{\sqrt{\int_0^2 \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 x\,dx}} = \text{osv.}$$

$$\varphi_3 = \frac{f_2 - \langle f_2, \varphi_1\rangle \varphi_1 - \langle f_2, \varphi_0\rangle \varphi_0}{\|f_2 - \langle f_2, \varphi_1\rangle \varphi_1 - \langle f_2, \varphi_0\rangle \varphi_0\|}$$

Efter detta hittas approximerande polynomen:

$$P(x) = \langle x^3, \varphi_0\rangle \varphi_0 + \langle x^3, \varphi_1\rangle \varphi_1 + \langle x^3, \varphi_2\rangle \varphi_2.$$

3. Perioden $T = 4$, $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$
givna funktionen f utvecklas i F-serie med perioden T:

$$f(t) = \sum c_n e^{in\frac{\pi}{2}t},$$

$$c_n = \frac{1}{2}\int_0^4 f(t)e^{-in\frac{\pi}{2}t}dt$$

- integralen beräknas.

Söker lösningen $y(t)$ som en F-serie

$$y(t) = \sum y_n e^{in\frac{\pi}{2}t}$$

sätter in i ekvationen och jämför koefficienterna:

$$-\left(in^3\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right)y_n + 3n^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y_n + y_n = c_n$$

därifrån hittar y_n.

1. $f(x) = \int_0^{\pi} e^{ix\xi}\sqrt{\sin\xi}\,d\xi$. Det betyder att f är (2π gånger) den inversa F-transf. av

$$F(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\sin\xi}, & \xi \in (0,\pi) \\ 0, & \xi \notin 0,\pi \end{cases} \quad ; \; F(\xi) = \cancel{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\,d\xi$$

Enligt Plancherel,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \frac{(2\pi)^2}{2\pi}\int_0^{\pi} (\sqrt{\sin\xi})^2 d\xi = 2\cdot\frac{(2\pi)^2}{2\pi} = 4\pi$$

Vidare, $\cancel{\tilde{f}(\xi)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\cdot 0}\,dx$

$$= \tilde{f}(0) = 0$$

Slutligen, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) e^{5ix}\,dx$, enligt plancherel, $= \langle f(x), g(x) e^{5ix}\rangle =$

$$\frac{1}{2\pi}\langle \tilde{f}(\xi), \widetilde{ge^{5ix}}(\xi)\rangle$$

och man kan se att $\tilde{f}(\xi) = 0$ utanför intervallet $(0,\pi)$, och $\cancel{ge^{5ix}}$ F-transformation av $g(x) e^{5ix} = 0$ utanför intervallet $(5,6)$. Da

$$\tilde{f}\cdot\widetilde{ge^{5ix}} = 0 \text{ överallt och}$$

integral $= 0$.

5. $\Delta u = 0$, $x \in (0,\pi)$, $y \in (0, 2\pi)$

$u(x,0) = \sin x$, $u(x,2\pi) = 0$

$u(0,y) = \sin 2y$, $u(\pi, y) = 0$.

Framställer $u(x,y)$ som summan av 2 funktioner $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$. Funktioner satisfierar problem

$\Delta v = 0$, $v(x,0) = \sin x$, $v(x,2\pi) = 0$

$v(0,y) = 0$, $v(\pi,y) = 0$

$\Delta w = 0$, $w(x,0) = 0$, $w(x,2\pi) = 0$

$w(0,y) = \sin 2y$, $w(\pi,y) = 0$.

Vi löser problem för v: Delar variabler:

$\Delta v = 0$, $v(x,y) = X(x)Y(y)$,

$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$; $\frac{X''}{X} = -\lambda^2$, $\frac{Y''}{Y} = \lambda^2$

Löser S-L problem $X'' + \lambda^2 X = 0$ med randvillkoren $X(0) = X(\pi) = 0$ (det följer ur randvillkoren för $v(x,y)$).

$X_n(x) = \sin nx$, $\lambda_n = n$,

~~$Y_n(y)$ = Löser ekvationen för~~ $Y(y)$:

$Y'' - n^2 Y = 0$ Söker lösningen i formen

$v(x,y) = \sum \sin nx\, Y_n(y)$. Sätter in i ekvationen: $Y_n''(y) = n^2 Y_n(y)$.

Randvillkoren

$\begin{cases} v(x,0) = \sum \sin nx\, Y_n(0) = 0 \\ v(x,2\pi) = \sum \sin nx\, Y_n(2\pi) = \sin x \end{cases}$

multiplicerar med $\sin kx$ och integrerar:

$Y_k(0) = 0$ alla k; $Y_k(2\pi) = 0$, $k \neq 1$,

$Y_1(2\pi) = 1$. Löser ekvationen:

$Y_1'' = Y_1$, $Y_1(0) = 0$, $Y_1(2\pi) = 1$: Lösningen $Y_1(y) = \frac{\sinh y}{\sinh(2\pi)}$

$v(x,y) = \sin x \cdot \sinh y / \sinh(2\pi)$

$w(x,y)$ hittas på samma sätt.

6 MVE.

$u_{tt} = u_{xx} + 2u_x + u \quad , t > 0$

Fourier i x-led. $V = \hat{u}(\xi, t)$

$$V_{tt} = -\xi^2 V + 2i\xi V + V = (-\xi^2 + 2i\xi + 1)V$$

Löser ekvationen $\qquad = (i\xi + 1)^2 V$

karakteristiska ekvationen

$K^2 = (i\xi+1)^2 \quad ; \quad K = \pm(i\xi+1)$.

$$V(\xi, t) = A(\xi) e^{(i\xi+1)t} + B(\xi) e^{-(i\xi+1)t}$$

med okända $A(\xi)$, $B(\xi)$.

Termer $A(\xi) e^{(i\xi+1)t}$ växer exponentiellt när $t \to +\infty$. Vi söker en begränsad lösning, därför $A(\xi) = 0$

$$V(\xi, t) = B(\xi) e^{-(i\xi+1)t}$$

För att hitta $B(\xi)$, använder begynnelse-villkor: $V(\xi, 0) = B(\xi) = \hat{f}(\xi)$

$B(\xi) = \hat{f}(\xi)$

$$V(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-i\xi t} e^{-t}$$

$u(x,t) =$ invers F-transform av $V(\xi, t)$,

$= f(\xi + t) e^{-t}$.

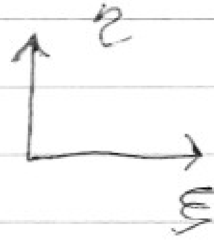
$\boxed{6\ \text{TMA}}$. $\Delta u = 0$, $y > 0$:

$u(x,0) = 1$, $1 < x < 2$; $u(x,0) = -1$, $2 < x < 5$,

$u_y = 0$, $x > 5$; $u_y = 0$, $x < 1$.

Ta $z = x + iy$, transformerar till kvartplanet:

$w = (z-1)^{\frac{1}{2}}$. Problemet transformeras till:



$v(w)$, $\Delta w = 0$ i kvarten,

$w = \xi + i\eta$, $\xi, \eta > 0$

$v_\xi = 0$ på linjen $\xi = 0$

$v(\xi, 0) = 1$, $0 < \xi < 1$; $v(\xi, 0) = -1$, $1 < \xi < 2$,

$v(\xi, 0) = 0$, $\xi > 2$.

Fortsätter v som en jämn funktion på hela övrehalvplanet $\eta > 0$. Det är möjligt eftersom $v_\xi = 0$ på η-axeln.

Då kommer vi till ett problem

$\Delta v(\xi, \eta) = 0$, $\eta > 0$ med randvillkoren

$$\left.\begin{aligned}
&v(\xi,0) = 0, \quad \xi < -2; \\
&v(\xi,0) = -1, \quad -2 < \xi < -1 \\
&v(\xi,0) = 1, \quad -1 < \xi < 0 \\
&v(\xi,0) = 1, \quad 0 < \xi < 1 \\
&v(\xi,0) = -1, \quad 1 < \xi < 2,
\end{aligned}\right\}$$

$v(\xi, 0) = 0$, $\xi > 2$.

Det är ett standart problem och lösas genom

$v(\xi, \eta) = A \arg(w+2) + B \arg(w+1) + C \arg(w-1)$

$+ D \arg(w-2) + E$.