

**Fourieranalys F2/Kf2, MVE030, 6 poäng TMA132, 7,5 poäng**

OBS! Ange namn, personnummer, kurskod samt linje och inskrivningsår.

---

1. Med hjälp av utveckling i Fourier-Bessel serie hitta en lösning  $u(r, \theta, t)$  av randvärdeproblem för värmeekvationen  $u_t = 2\Delta u - 5u$  i cirkelskivan  $r < 1$  med begynnelsevillkoret  $u(r, \theta, 0) = r^3 \cos(3\theta)$  och randvillkoret  $u_r(r, \theta, t) = \cos(3\theta)$  för  $r = 1$ . **Tips: sök lösningen på formen  $u(r, \theta, t) = v(r, t) \cos(3\theta)$**

2. a) **MVE030** Utveckla i serie i Legendrepolymer på intervallet  $(-1, 1)$  funktionen  $f(x)$ :  $f(x) = x^3$ ,  $x \in (0, 1)$ ,  $f(x) = 0$ ,  $x \in (-1, 0]$ . (Värdet av  $P_n(0)$  tas ur BETA).

- b) **TMA132** Med hjälp av konforma avbildningar och symmetri hitta i området  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $0 < y < x$ , den elektrostatiske potentialen  $u$ ,  $\Delta u = 0$ , som är lika med 1 på  $x$ -axeln  $y = 0$ ,  $0 < x < 2$ , lika med  $-1$  för  $y = 0$ ,  $x > 2$ , och som har normalderivatan 0 på linjen  $y = x$ .

3. Lös med hjälp av utvecklingen i Fourier serie i egenfunktioner av ett passande Sturm-Liouville problem ekvationen

$$u_{tt} - 2u_t + 5u = u_{xx}, 0 < x < \pi, t > 0$$

med randvillkoren  $u_x(0, t) = 1$ ,  $u(\pi, t) = 1$  och begynnelsevillkoren  $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ .

4. Med hjälp av Fouriertransformation bestäm en lösning till problemet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, -\infty < x < \infty, y > 0; u(x, 0) = \frac{x}{x^2 + 1}. \quad (1)$$

Lösningen anges i slutna form (utan kvarvarande integraler).

5. Funktionen  $f(x)$  definieras som  $f(x) = \int_0^2 e^{ix\xi}/(1 + \xi)d\xi$ . Beräkna  
(a)  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ , (b)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ , (c)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2ix} dx$ , (d)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-3ix} dx$   
där  $\hat{g}(\xi) = \cos(\xi)$ ,  $\xi \in (5, 6)$ ,  $\hat{g}(\xi) = 0$  utanför  $(5, 6)$ .

6. Lös ekvationen  $u_{xx} + u_{yy} - u = 0$  i rektangeln  $x \in (0, 1)$ ,  $y \in (0, 2\pi)$  med randvillkoren  $u_y(x, 0) = x(1 - x)$ ,  $x \in (0, 1)$ ,  $u = 0$  på resten av randen. Använd F-serie i något led.

7. a) **MVE030** Berätta om reglerna för termvis derivering och termvis integrering av Fourier serier. Ange exempel. Förklara var felet i den följande resonemangen finns. Låt  $f$  vara  $2\pi$ -periodiska funktionen som är lika med  $e^\theta$  för  $\theta \in (0, 2\pi)$ ; dennes F-serie är  $e^\theta = \sum c_n e^{in\theta}$ . Termvis derivering ger  $e^\theta = \sum in c_n e^{in\theta}$ . Jämförelse ger  $(1 - in)c_n = 0$ ,  $c_n = 0$  för alla  $n$ .

- b) **TMA132** Berätta så mycket som du kan om tillämpningar av konforma avbildningar i hydrodynamik.

8. Berätta så mycket som du kan om samplingsprocessen, samplingsteorem och tillämpningar.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdiggrättas den 25. januari. Lösningförslag publiceras på kursens webbsida 21. januari.