Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa
MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Telefon: Walter Levy, 0740–459022
2002–03–09 kl. 14.15-19.15

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. För ett linjärt tidsinvariant system gäller att insignalen $x_1(t) = \operatorname{sign}(t)e^{-|t|}$ ger upphov till utsignalen $y_1(t) = t\operatorname{sign}(t)e^{-2|t|}$. Vad blir utsignalen $y(t)$, om insignalen $x(t)$ är 2π-periodisk $x(t) = \pi - t$ för $0 < t < 2\pi$? Ange $y(t)$ i form av en komplex trigonometrisk Fourierserie.

2. Bestäm den elektrostatiska potentialen $\varphi(x,y)$ i området $D = \{(x,y) : 0 < y < x\}$ om potentialen på randen är

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \alpha, & (x,y) \in \partial D, \quad x^2+y^2 > r^2, \\ \beta, & (x,y) \in \partial D, \quad x^2+y^2 \le r^2. \end{cases}$$

3. Beräkna faltningen $(f * f)(x),\ -\infty < x < \infty$, då

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\xi}\sin(\xi x)\,d\xi, \quad -\infty < x < \infty.$$

4. Lös begynnelsevärdesproblemet (c är konstant),

$$\begin{cases} u_t + c^2 u = u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = xe^{-x^2}, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

5. Lös Dirichlets randvärdesproblem $\nabla^2 u(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r},\ 0 < a < r < b$, med rand data $u(a,\theta) = \cos\theta$, och $u(b,\theta) = 1$. (Obs! sfäriska koordinater).

6. Bestäm den stationära temperaturfördelningen i cylindern $x^2 + y^2 \le a^2,\ 0 \le z \le 1$, då den buktiga ytan $x^2 + y^2 = a^2$ och "toppen" $z = 1$ hålls vid temperaturen 0 medan "botten" $z = 0$ ligger på en platta med radiell värmespridning enligt $u(r,0) = r^2$.

7. Visa att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)z^n = e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}, \quad \forall z \ne 0, \quad \forall x.$$

8. Definiera vad som menas med derivatan av en distribution. Visa att om $g \in C^{(\infty)}$ och F är en distribution så gäller att:

$$(gF)' = g'F + gF'.$$

MA