Lösning till tentamen i Fourieranalys för F2/Kf2 den 10/3 1998

1. Eftersom $\mathcal{F}[e^{-|t|}\operatorname{sgn} t] = -\frac{2i\omega}{1+\omega^2}$, ger Plancherels sats

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-|t|}\operatorname{sgn} t\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega\theta(\omega)}{(1+\omega^2)^2}\,\overline{\frac{-2i\omega}{1+\omega^2}}\,d\omega = \frac{i}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)^3}\,d\omega$$

$$= [\text{Partialintegration eller direkt ur Beta}] = \frac{i}{\pi}\left(\left[-\frac{\omega}{4(1+\omega^2)^2}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+\omega^2)^2}\,d\omega\right)$$

$$= [\text{Beta}] = \frac{i}{4\pi}\left[\frac{\omega}{2(1+\omega^2)} + \frac{1}{2}\arctan\omega\right]_0^{\infty} = \frac{i}{8\pi}\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{i}{16}}.$$

(Den sista integralen kan också beräknas m.h.a. att $\mathcal{F}[e^{-|t|}] = \frac{2}{1+\omega^2}$ och Plancherels formel: $\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+\omega^2)^2}\,d\omega = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{(1+\omega^2)^2}\,d\omega = \frac{\pi}{4}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2|t|}\,dt = \frac{\pi}{4}$.)

---

2. Variabelseparation: $u(x,y) = X(x)Y(y)$ i de homogena ekvationerna ger

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(a) = 0, \qquad Y'' - \lambda Y = 0.$$

Egenvärdesproblemet för X ger $\lambda_n = (\frac{n\pi}{a})^2$, $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a}$. För Y fås sedan $Y_n(y) = a_n\cosh\frac{n\pi y}{a} + b_n\sinh\frac{n\pi y}{a}$. Ansätt

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cosh\frac{n\pi y}{a} + b_n\sinh\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a},$$

och bestäm a_n och b_n så att

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\frac{n\pi x}{a} = x(a-x),$$

$$u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cosh\frac{n\pi b}{a} + b_n\sinh\frac{n\pi b}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a} = x(a-x).$$

Utveckla $x(a-x)$ i Fourierserie m.a.p. ortogonalbasen $\{\sin\frac{n\pi x}{a}\}_1^{\infty}$:

$$x(a-x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\sin\frac{n\pi x}{a}, \qquad \text{där } c_n = \frac{2}{a}\int_0^a x(a-x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx = 4a^2\frac{1-(-1)^n}{n^3\pi^3}.$$

Alltså är $a_n = c_n$, och

$$c_n\cosh\frac{n\pi b}{a} + b_n\sinh\frac{n\pi b}{a} = c_n, \qquad b_n = \frac{c_n(1-\cosh\frac{n\pi b}{a})}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}.$$

Lösningen blir

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4a^2[1-(-1)^n]}{n^3\pi^3}\left(\cosh\frac{n\pi y}{a} + \frac{1-\cosh\frac{n\pi b}{a}}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}\sinh\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a},$$

vilket kan omformas till

$$\boxed{u(x,y) = \frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{1}{n^3}\frac{\cosh\frac{n\pi}{a}(y-\frac{b}{2})}{\cosh\frac{n\pi b}{2a}}\sin\frac{n\pi x}{a}}.$$

---

3. Sätt in $u(r,t) = v(r)\sin\omega t$ i differentialekvationen:

$$-\omega^2 v(r)\sin\omega t = c^2\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\big(rv'(r)\big)\sin\omega t, \qquad r^2v'' + rv' + \big(\frac{\omega}{c}\big)^2 r^2 v = 0.$$

Man får Bessels differentialekvation av ordning 0 med lösning

$$v(r) = C_1J_0(\frac{\omega r}{c}) + C_2Y_0(\frac{\omega r}{c}).$$

Randvillkoren ger

$$C_1J_0(\frac{\omega a}{c}) + C_2Y_0(\frac{\omega a}{c}) = 1,$$

$$C_1J_0(\frac{\omega b}{c}) + C_2Y_0(\frac{\omega b}{c}) = 0,$$

vilket är ett ekvationssystem med determinant $\Delta(\omega) = J_0(\frac{\omega a}{c})Y_0(\frac{\omega b}{c}) - J_0(\frac{\omega b}{c})Y_0(\frac{\omega a}{c})$. Om $\Delta(\omega) \neq 0$, finns en entydig lösning $C_1 = Y_0(\frac{\omega b}{c})/\Delta(\omega)$, $C_2 = -J_0(\frac{\omega b}{c})/\Delta(\omega)$. Om $\Delta(\omega) = 0$, ser man (eftersom J_0 och Y_0 aldrig kan vara 0 samtidigt) att lösning saknas. Alltså är

$$\boxed{v(r) = \frac{Y_0(\frac{\omega b}{c})J_0(\frac{\omega r}{c}) - J_0(\frac{\omega b}{c})Y_0(\frac{\omega r}{c})}{J_0(\frac{\omega a}{c})Y_0(\frac{\omega b}{c}) - J_0(\frac{\omega b}{c})Y_0(\frac{\omega a}{c})}}$$

för sådana ω sådana att $J_0(\frac{\omega a}{c})Y_0(\frac{\omega b}{c}) - J_0(\frac{\omega b}{c})Y_0(\frac{\omega a}{c}) \neq 0$.

---

4. Fouriertransformering av ekvationen ger $-\xi^2\hat{u} + \frac{\partial^2\hat{u}}{\partial y^2} = 0$, varav $\hat{u}(\xi, y) = C_1 e^{-|\xi|y} + C_2 e^{|\xi|y}$. Begränsad lösning ger $C_2 = 0$. Om $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+5}$, fås $\hat{u}(\xi, 0) = C_1 = \hat{f}(\xi)$. Skriv

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-1)^2+4} + \frac{1}{(x-1)^2+4}.$$

Eftersom $\mathcal{F}[\frac{x}{x^2+4}] = -i\pi e^{-2|\xi|}\operatorname{sgn}\xi$, och $\mathcal{F}[\frac{1}{x^2+4}] = \frac{\pi}{2}e^{-2|\xi|}$, blir

$$\hat{f}(\xi) = e^{-i\xi}\big(\frac{\pi}{2}e^{-2|\xi|} - i\pi e^{-2|\xi|}\operatorname{sgn}\xi\big), \qquad \hat{u}(\xi, y) = e^{-i\xi}\big(\frac{\pi}{2}e^{-|\xi|(y+2)} - i\pi e^{-|\xi|(y+2)}\operatorname{sgn}\xi\big).$$

Alltså blir

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \left[\frac{y+2}{2}\,\frac{1}{x^2+(y+2)^2} + \frac{x}{x^2+(y+2)^2}\right]_{x\to x-1} \\ &= \frac{\frac{y}{2}+x}{(x-1)^2+(y+2)^2} = \boxed{\frac{x+\frac{y}{2}}{x^2+y^2-2x+4y+5}}. \end{aligned}$$

---

5. $\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = \sin\theta$. Bestäm $f(r)$ så att $f(r)\sin\theta$ blir en lösning:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\big(rf'(r)\big)\sin\theta - \frac{1}{r^2}f(r)\sin\theta = \sin\theta, \quad r^2 f''(r) + rf'(r) - f(r) = r^2.$$

Sök en lösning $f(r) = ar^2 + br + c$:

$$2ar^2 + r(2ar+b) - ar^2 - br - c = 3ar^2 - c = r^2, \qquad a = \frac{1}{3},\ c = 0.$$

Välj för enkelhets skull b så att $f(1) = 0$, dvs. $b = -\frac{1}{3}$. Alltså blir $f(r) = \frac{1}{3}(r^2 - r)$ och $v = u - f(r)\sin\theta$ kommer att satisfiera

$$\begin{gathered} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} = 0, \\ v = 0 \quad \text{för } \theta = 0 \text{ och } \theta = \pi, \\ v = \cos\theta \quad \text{för } r = 1. \end{gathered}$$

Variabelseparation: $v(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ ger

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0, \qquad \Theta'' + \lambda\Theta = 0,\ \Theta(0) = 0,\ \Theta(\pi) = 0.$$

Egenvärdesproblemet för Θ har lösningarna $\lambda_n = n^2$, $\Theta_n(\theta) = \sin n\theta,\ n \geq 1$. Ekvationen för R är av Euler-typ med begränsad lösning $R_n(r) = r^n$. Ansätt

$$v(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \sin n\theta,$$

och bestäm c_n så att

$$v(1,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\theta = \cos\theta.$$

Då fås

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta\,\sin n\theta\,d\theta = \frac{2}{\pi}\frac{n[1+(-1)^n]}{n^2-1} \quad \text{för } n \neq 1,\ \text{och } c_1 = 0.$$

Resultatet blir

$$\boxed{u(r,\theta) = \frac{1}{3}(r^2 - r)\sin\theta + \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}r^{2k}\sin 2k\theta}.$$

---

7. Fixera z och sätt $f(x) = e^{2xz-z^2}$. Funktionen f tillhör $L^2_w(-\infty,\infty)$ med $w(x) = e^{-x^2}$ och har Fourier-koefficienterna

$$c_n = \frac{1}{\|H_n\|_w^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx.$$

Vi har, eftersom $f'(x) = 2zf(x)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-1)^n\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n e^{-x^2}\,dx$$

$$= \Big[f(x)(-1)^n\Big(\frac{d}{dx}\Big)^{n-1}e^{-x^2}\Big]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} 2zf(x)(-1)^{n-1}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^{n-1}e^{-x^2}\,dx.$$

Den utintegrerade funktionen är $e^{2xz-z^2}\cdot(\text{polynom i } x)\cdot e^{-x^2} = (\text{polynom i } x)\cdot e^{-(x-z)^2}$ som går mot noll då $x \to \pm\infty$. Fortsatta partialintegrationer ger på samma sätt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (2z)^n f(x)e^{-x^2}\,dx = (2z)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-z)^2}dx$$

$$= [x - z = t,\ z \text{ reell konstant}] = (2z)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = (2z)^n\sqrt{\pi}.$$

Alltså blir

$$c_n = \frac{(2z)^n\sqrt{\pi}}{\|H_n\|_w^2} = \frac{(2z)^n\sqrt{\pi}}{2^n n!\sqrt{\pi}} = \frac{z^n}{n!}.$$

Det följer att $e^{2xz-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}H_n(x)$ med konvergens i $L^2_w(-\infty,\infty)$-norm.