Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA131 Fourieranalys för F2/Kf2** den 16/1 1999, kl. 14.15–18.15.

Hjälpmedel: Beta, Standard Math. Tables. Typgodkänd räknedosa.
Telefon: Vladislav Panferov, ankn. 5338.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Låt $F(\xi) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} e^{i\xi x}\, dx$. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \cos\xi \, d\xi$. (7p)

2. Ett filter har stegsvaret $j(t) = te^{-t}\theta(t)$ (dvs. $j(t)$ är svaret på enhetssteget $\theta(t)$). Ange impulssvaret $h(t)$ och beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \frac{\sin t}{t}\, dt$. (7p)

3. Lös problemet

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\
&u(0, y) = 0, \quad u_x(1, y) = 1, \\
&u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 1.
\end{aligned}$$

(8p)

4. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som minimerar

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x} - P(x)\right)^2 dx\,.$$

(Vilka är ortogonalpolynomen på $[0, 1]$?) (7p)

5. En lång cylinder har från början temperaturen 0. Efter tiden $t = 0$ hålls mantelytan vid en periodiskt varierande temperatur. Bestäm temperaturutvecklingen i cylinderns inre. Den beskrivs av följande ekvationer:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 < r < b,\ t > 0, \\
&u(r, t) \text{ begränsad}, \\
&u(b, t) = \sin t, \\
&u(r, 0) = 0.
\end{aligned}$$

(7p)

6. Visa Hermitepolynomens ortogonalitet. (7p)

7. Formulera och bevisa en sats om termvis derivering av trigonometriska Fourierserier. Konvergenssatsen får anses känd. (7p)

KH

Svar

1. $\dfrac{\pi}{4}$

2. $h(t) = (1-t)e^{-t}\theta(t); \quad \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$

3. $u(x,y) = y + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi \cosh n\pi} \left[\frac{1-(-1)^n}{n\pi} \sinh n\pi x + (-1)^n \cosh n\pi(1-x) \right] \sin n\pi y$

4. $\dfrac{2}{35}(3 + 24x - 10x^2)$

5. $u(x,t) = \sin t + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_n J_1(\alpha_n) \left[(\frac{\alpha_n}{b})^4 + 1 \right]} \left[\left(\frac{\alpha_n}{b}\right)^2 e^{-(\frac{\alpha_n}{b})^2 t} - \sin t - \left(\frac{\alpha_n}{b}\right)^2 \cos t \right] J_0\left(\frac{\alpha_n r}{b}\right),$

   där α_n är de positiva nollställena till ekv. $J_0(x) = 0$