Sats om approximation. *Låt ψ_n vara ett ortonormerade system i L^2 (möjligtvis, med vikt) och $\varphi \in L^2$. Då den bästa approximation i normen av funktionen f med $\sum_1^N b_n\psi_n$ ges i fall när koefficienterna b_n är lika med Fourier koefficienterna $c_n =< f, \psi_n >$ av f med avseende på ψ_n.*

Bevis. Betecknar $g = f - \sum_1^N c_n\psi_n$. Det gäller att om $k \leq N$, så $< g, \psi_k >= 0$. I verklighet,

$$< f - \sum < f, \psi_n > \psi_n, \psi_k >=< f, \psi_k > - \sum < f, \psi_n >< \psi_n, \psi_k >= \\ < f, \psi_k > - < f, \psi_k >< \psi_k, \psi_k >= 0.$$

Nu beräknar vi $||f - \sum_1^N b_n\psi_n||^2$, Vi har

$$f - \sum_1^N b_n\psi_n = \sum_1^n (c_n - b_n)\psi_n + f - \sum_1^N c_n\psi_n = \sum_1^n (c_n - b_n)\psi_n + g.$$

Därför

$$||f - \sum_1^N b_n\psi_n||^2 =< f - \sum_1^N b_n\psi_n, f - \sum_1^N b_k\psi_k >= \\ < \sum_1^n (c_n - b_n)\psi_n + g, \sum_1^k (c_k - b_k)\psi_k + g >$$

Multiplicerar ihåp och använder $< g, \psi_n >= 0$. Vi kommer till

$$||f - \sum_1^N b_n\psi_n||^2 = ||g||^2 + \sum_1^n |b_n - c_n|^2. \qquad *$$

I (*), i höger leden, beror första termen inte på koefficienter b_n. Så, för att minimera (*) måste vi minimera andra termen till höger. Det minsta värdet till den termen är 0, när alla $b_n = c_n$