

**TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng**

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Bestäm det polynom  $P(x)$  av högst andra graden som minimerar

$$\int_0^{\infty} [e^{-x} - P(x)]^2 x e^{-x} dx.$$

2. Signalen  $x(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$  har Fouriertransformen  $\hat{x}(\omega)$  där

$$|\hat{x}(\omega)| = \begin{cases} 1, & \text{för } |\omega| < 1, \\ 2, & \text{för } 2 < |\omega| < 3, \\ 0, & \text{f.ö.} \end{cases}$$

Låt  $\alpha > 0$  och sätt  $h_\alpha(t) = \frac{\sin \alpha t}{\pi t}$ ,  $-\infty < t < \infty$ . Bestäm funktionen

$$f(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} |(h_\alpha * x)(t)|^2 dt,$$

och rita dess graf.

3. Låt  $\chi_a(x) = \theta(x+a) - \theta(x-a)$ . Bestäm en lösning till ekvationen

$$\begin{cases} u_{xx} + cu_x = u_t, & -\infty < x < \infty, & t > 0, \\ u(x, 0) = \chi_a(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

där  $c$  är en reell parameter och  $a > 0$ .

4. Bestäm den elektrostatiske potentialen i området utanför två tangerande cylindrar med cirkulära tvärsnitt  $C_1 : |z| \leq 1$ , och  $C_2 : |z-3/2| \leq 1/2$  och med motsvarande randvärdena  $P_1$  på  $|z| = 1$ , resp.  $P_2$  på  $|z-3/2| = 1/2$ .

5. Antag att  $c > 0$ . Bestäm en lösning (spänningen  $u(x, t)$  längs en elkabel med konstant polspänning  $E \neq 0$ ) till ekvationen

$$\begin{cases} u_{xx} = \frac{1}{c^2} u_{tt}, & t > 0, & 0 < x < 1, \\ u(0, t) = E, & u_x(1, t) + 2u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

6. Bestäm den stationära temperaturen i cylindern  $x^2 + y^2 \leq a^2$ ,  $0 \leq z \leq b$  då den buktiga ytan  $x^2 + y^2 = a^2$  och "toppen":  $z = b$  hålls vid temperaturen 0 medan "botten":  $z = 0$  är på en "platta" med temperaturen  $f(r, \theta)$  där  $f(a, \theta) = 0$ , för  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ .

7.  $f$  är  $2\pi$ -periodisk och styckvis  $C^1$  på  $\mathbb{R}$  med  $\mathcal{F}$ -koefficienter  $C_n$ . Visa att

$$\sum_{-N}^N C_n e^{in\theta} \rightarrow \frac{1}{2} [f(\theta_-) + f(\theta_+)], \quad \text{då } N \rightarrow \infty.$$

8. Formulera och bevisa Fouriers inversionssats (obs! valfritt version).