

MATEMATIK
CHALMERS

Fourieranalys F2/Kf2, MVE030, 6 poäng; TMA132, 7,5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. Hitta i formelsamlingen eller beräkna själv utvecklingen i trigonometriska F-serie för funktionen $f(\theta) = \sinh \theta$, $-\pi < \theta < \pi$. Med valet av ett passande värde av θ och/eller Parseval, beräkna summor $\sum (-1)^k \frac{2k-1}{(2k-1)^2+1}$, $\sum \frac{n^2}{(n^2+1)^2}$. Vilken utveckling får man med termvis integrering? Vad får man med hjälp av Parseval för den integrerade serie? Föreslå någon funktion $g(\theta)$ så att man kan termvis derivera serien för $f + g$ och hitta den deriverade serien.
2. Med hjälp av fouriermetoden hitta en lösning $u(r, \theta, z)$ av randvärdeproblem för Laplaceekvationen $\Delta u(r, \theta, z) = 0$ i cylindern $r < 2$, $0 < z < 2$ med randvillkoren $u(r, \theta, 0) = xy$, $u(r, \theta, 2) = 0$, $u_r(2, \theta, z) = 0$.
3. a) **MVE030** Hitta en begränsad lösning av värmeekvationen $u_t = 2u_{xx}$ för $t > 0$, $x > 0$ med randvillkoret $u(0, t) = 0$ och begynnelsevillkoret $u(x, 0) = xe^{-x}$.
b) **TMA132** Med hjälp av konforma avbildningar och symmetri hitta i området $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $0 < y < 2x$, den elektrostatiska potentialen u , $\Delta u = 0$, som är lika med 1 på x -axeln $y = 0$, $0 < x < 1$, lika med -1 för $y = 0$, $x > 1$, och som har normalderivatan 0 på linjen $y = 2x$.
4. Lös med hjälp av utvecklingen i Fourier serie i egenfunktioner av ett passande Sturm-Liouville problem ekvationen

$$u_{tt} + 4u = u_{xx} - u_x, 0 < x < \pi, t > 0$$

med randvillkoren $u_x(0, t) = 1$, $u(\pi, t) = -1$ och begynnelsevillkoren $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$.

5. Det finns två svarta lådor (tidsinvarianta linjära system) \mathcal{A} och \mathcal{B} . Systemet \mathcal{A} ger utsignalen $\frac{t}{(4+t^2)}$ för insignalen $\frac{1}{1+t^2}$. System \mathcal{B} ger utsignalen te^{-2t^2} för insignalen $\frac{1}{4+t^2}$. Man skicker signalen $x(t) = 1$, $t \in (0, 1)$; $x(t) = 0$, $t \notin (0, 1)$ till ingång av systemet \mathcal{A} och svaret skicker till ingång av systemet \mathcal{B} . Vad får man på utgång av \mathcal{B} ? Vad händer om man börjar med \mathcal{B} i stället?
6. Lös ekvationen $u_{xx} + u_{yy} - u = 0$ i halvdysken $x^2 + y^2 < 1$, $x > 0$ med randvillkoren $u(x, 0) = 1 - x^2$, $x \in (-1, 1)$, $u = 0$ för $x^2 + y^2 = 1$.
7. a) **MVE030** Berätta så mycket du kan om Legendrepolynomerna och tillämpningar.
b) **TMA132** Berätta så mycket som du kan om problem i potentialteori som kommer från olika områden och relation med konforma avbildningar.
8. Bevisa och diskutera tillämpningar av satsen om den bästa approximationen. Ge ett exempel.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdiggrättas den 20. mars.