Hjälpmedel: Beta, Standard Math. Tables, typgodkänd räknedosa
MATEMATIK Telefon: Fredrik Lindgren 0762-721860
Chalmers tekniska högskola 2008–08-27 kl. 8.30–13.30

Fourieranalys F2/Kf2, MVE030, 6 poäng TMA132, 7,5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer, kurskod samt linje och inskrivningsår.

---

1. För ett linjärt tidsinvariant system gäller att insignalen $x_1(t) = sign(t)e^{-|t|}$ ger upphov till utsignalen $y_1(t) = t\ sign(t)e^{-2|t|}$. Vad blir utsignalen $y(t)$, om insignalen $x(t)$ är 2π - periodisk funktion $x(t) = \pi - t$ för $0 < t < 2\pi$?? Ange svaret i form av en komplex trigonometrisk Fourierserie.

2. Lös randvärdeproblemet i sfäriska koordinater:$\Delta u(r, \theta, \phi) = r^{-1},\ 0 < a < r < b$ med randdata $u(a, \theta, \phi) = \cos\theta,\ u(b, \theta, \phi) = 1$.

3. a) **MVE030**Med hjälp av Fouriermetoden lös begynnelsevärdeproblemet

$$u_t + u = u_{xx},\ -\infty < x < \infty; t > 0$$
$$u(x, 0) = xe^{-x^2},\ -\infty < x < \infty.$$

   b) **TMA132** Med hjälp av konforma avbildningar och symmetri hitta i området $(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ 0 < y < 3x$, den elektrostatiska potentialen u, $\Delta u = 0$, som är lika med 1 på x-axeln $y = 0,\ 0 < x < 1$, lika med -1 för $y = 0$, $x > 0$, och som har normalderivatan 0 på linjen $y = 3x$.

4. Funktionen $f(x)$ definieras som $f(x) = (2\pi)^{-1}\int_{-3}^{5} e^{ix\xi}(1+\xi^2)^{-1/2}d\xi$. Beräkna: $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$,$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(x)dx$, $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(3x)dx$, $(f * f)(0)$.

5. Lös randvärdeproblemet för värmeledningsekvation:

$$u_t - u_{xx} = xe^t,\ 0 < x < \pi, t > 0;$$
$$u_x(0, t) = 1;\ u_x(\pi, t) = 0, t > 0;$$
$$u(x, 0) = 0,\ 0 < x < \pi.$$

6. Lös ekvationen $u_{xx} + 4u_{yy} - u = 0$ i rektangeln $x \in (0, 1), y \in (0, 2\pi)$ med randvillkoren $u_y(x, 0) = \sin(\pi x), x \in (0, 1)$, $u = 0$ på resten av randen. Använd F-serie i något led.

7. a) **MVE030** Bevisa formeln för genererande funktion för Besselfunktioner. Berätta om tillämpningar.

   b) **TMA132** Berätta så mycket som du kan om platta flödeproblem i hydrodynamik och tillämpningar av konforma avbildningar för deras analyse.

8. Reguljära och singulära Sturm-Liouville problem. Beskrivning, exempel, huvudegenskaper. Egenskaper av egenfunktioner och egenvärden (ortogonalitet av egenfunktioner ska bevisas.)

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas den 12. sept.. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida den 30.aug.