Hjälpmedel: Beta, Standard Math. Tables, typgodkänd räknedosa
MATEMATIK Telefon: 0762-721860
Chalmers tekniska högskola 2009–01-16 kl. 14.00–19.00, 5 timmar

Fourieranalys F2/Kf2, MVE030, 6 poäng; TMA132, 7,5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Hitta i formelsamlingen eller beräkna själv utvecklingen i trigonometriska F-serie för 2π-periodiska funktionen $f(\theta) = |\theta|$, $-\pi < \theta < -\pi$. Med valet av ett passande värde av θ och/eller Parceval, beräkna summor $\sum(-1)^n(2n-1)^{-2}$, $\sum(2n-1)^{-2}$, $\sum(2n-1)^{-4}$. Vilken utveckling får man med termvis integrering? Vad får man med hjälp av Parceval för den integrerade serie? Utveckla densamma funktionen i F-serie på intervallet $(-2\pi, 2\pi)$.

2. Med hjälp av fouriermetoden hitta en lösning $u(r, \theta, z)$ av randvärdeproblem för Laplaceekvationen $\Delta u(r, \theta, z) = 0$ i cylindern $r < 1$, $0 < z < 2$ med randvillkoren $u(r, \theta, 0) = x^2y^2$, $u(r, \theta, 2) = 0$, $u_r(1, \theta, z) = 0$.

3. a) **MVE030**Bestäm (med hjälp av Fouriertransform) en begränsad lösning till problemet
$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ -\infty < x < \infty, y > 0\ u(x, 0) = \frac{x}{x^2 - 2x + 5}.$$

   b) **TMA132** Med hjälp av konforma avbildningar och symmetri hitta i området $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $0 < y < x$, den elektrostatiska potentialen u, $\Delta u = 0$, som är lika med 1 på x-axeln $y = 0$, $0 < x < 4$, lika med -1 för $y = 0$, $x > 4$, och som har normalderivatan 0 på linjen $y = x$.

4. Lös med hjälp av utvecklingen i Fourier serie i egenfunktioner av ett passande Sturm-Liouville problem ekvationen
$$u_{tt} + 4u = u_{xx} + 2u_x, 0 < x < \pi, t > 0$$
med randvillkoren $u_x(0, t) = 1, u_x(\pi, t) = -1$ och begynnelsevillkoren $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$.

5. Den styckvis glatta funktionen $f(x)$ har Fouriertransformationen $\hat{f}(\xi) = \int_{-2}^{2} \cos(\xi x)\frac{e^x}{1+x^2}dx$. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\cos(\xi)d\xi$, $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\cos(2\xi)d\xi$, $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f(\xi)}|^2 d\xi$.

6. Bestäm en lösning till problemet
$$xu_{xx} + (1 - x)u_x = u_t,\ 0 < x < \infty, t > 0,$$
$u(x, t)$ begränsad då $x \to 0$, $u(x, 0) = e^{-x}$.
`Ledning:` Laguerrpolynomen $L_n(x)$ satisfierar ekvationen $xL_n'' + (1 - x)L_n' + nL_n = 0$. Gör en lämplig ansatz. Glöm inte om vikten.

7. a) **MVE030** Berätta så mycket du kan om Legendrepolynomen och tillämpningar.

   b) **TMA132** Berätta så mycket som du kan om problem i potentialteori som kommer från olika områden och relation med konforma avbildningar.

8. Berätta on samplingssatsen: beviset och tillämpningar.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas den 25. januari.