Fourieranalys F2-Kf2, MVE030
Tenta 2009-01-16
lösningförslag.

---

1. F-serie för $f(\theta)$ på $(-\pi,\pi)$ ges i tabellen:
Folland, s. 26, 2. $f(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^2}$.
funktionen är styckvis glatt och kontinuerlig, så
serien konvergerar mot $f(\theta)$ för alla θ.
Sätter $\theta=0$: $0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum \frac{1}{(2n-1)^2}$. Att få
summan $\sum (-1)^n (2n-1)^2$ går inte. Plancherel:

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\sum \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)^2 d\theta .$$

F-serie går att derivera

$$f'(\theta) = \operatorname{sign}\theta = \begin{cases} 1, & \theta \in (0,\pi) \\ -1, & \theta \in (-\pi,0) \end{cases}$$

$$\operatorname{sign}\theta = \frac{4}{\pi}\sum \frac{-(\sin(2n-1)\theta)}{(2n-1)} \qquad \theta \neq -\pi, 0, \pi$$

på intervallet $(-2\pi, 2\pi)$

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos n\theta/2$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta/2 \, d\theta.$$

2. I cylindriska koordinater

$$u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0.$$

$$u(r,\theta,0) = x^2y^2 = \frac{1}{8}r^4(1-\cos 4\theta)$$

$$u(r,\theta,2) = 0$$

$$u_r(1,\theta,z) = 0$$

Söker lösningen på formen

$$u(r,\theta,z) = u_1(r,z) + u_2(r,z)\cos 4\theta$$

u_1: $u_{1rr} + r^{-1}u_{1r} + u_{1zz} = 0$

$$u_1(r,0) = \frac{1}{8}r^4; \quad u_1(r,2) = 0; \quad u_{1r}(1,z) = 0$$

u_2: $u_{2rr} + r^{-1}u_{2r} - 4^2 r^{-2}u_2 + u_{2zz} = 0$

$$u_2(r,0) = -\frac{1}{8}r^4, \quad u_2(r,2) = 0, \quad u_{2r}(1,z) = 0$$

Löser problem för u_1, u_2 separat. T.ex., för $u_2(r,z)$. Söker separerade lösningar

$$u_2(r,z) = R(r)\,Z(z)$$

$$\frac{R'' + r^{-1}R' - 4^2 r^{-2}R}{R} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2$$

R- lösningen till Besselekvationen

$$R'' + r^{-1}R' - 4^2r^{-2}R + \lambda^2 R = 0$$

R uttryckas på vanliga sätt genom Besselfunktioner av ordningen 4

$$R_n(r) = J_4(\lambda_n r) \quad \text{där}$$

λ_n - nollställen av derivatan $J_4'(\lambda)$

$$Z_n'' = \lambda_n^2 Z_n$$

$$Z_n(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_n = A_n \sinh(\lambda_n (z-2))$$

$$u_2(r, z) = \sum A_n \sinh(\lambda_n (z-2)) J_4(\lambda_n r)$$

A_n hittas ur randvillkoret

$$u_2(r, 0) = -\frac{1}{8} r^4$$

$$\sum A_n \sinh(\lambda_n \cdot (-2)) J_4(\lambda_n r) = -\frac{1}{8} r^4$$

multiplicerar med $J_4(\lambda_k r) \cdot r$
och integrerar — hittar A_n.
På liknande sätt söker dellösningen $u_1(r, z)$
Då blir Besselfunktioner $J_0(\mu_k r)$
inblandade.

3.a. $u_{xx}+u_{yy}=0$, $-\infty<x<\infty$, $y>0$

$u(x,0)=\dfrac{x}{x^2-2x+5}$. En begränsad lösning sökes

F-transformerar i x:

$$U(\xi,y)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)\,e^{-i\xi x}\,dx.$$

$U(\xi,y)$ satisfierar ekvationen

$$-\xi^2U(\xi,y)+U_{yy}(\xi,y)=0 \qquad (1)$$

$$U(\xi,0)=\mathcal{F}\left[\frac{x}{x^2-2x+5}\right]$$

$$=\mathcal{F}\left[\frac{x-1+1}{(x-1)^2+2^2}\right]$$

$$=\mathcal{F}\left[\frac{x-1}{(x-1)^2+2^2}\right]+\mathcal{F}\left[\frac{1}{(x-1)^2+2^2}\right]$$

$$=e^{-i\xi}\,\pi\,\mathrm{sgn}\,\xi\,e^{-2|\xi|}+\frac{\pi}{2}e^{-2|\xi|}=\varphi(\xi)$$

lösningen till (1) har formen

$$U(\xi,y)=A(\xi)e^{-2|\xi|y}+B(\xi)e^{2|\xi|y}$$

Villkoret att U är begränsad leder till $B(\xi)=0$. $A(\xi)$ hittas ur randvillkoret

$$A(\xi)=U(\xi,0)=\varphi(\xi)$$

$$U(\xi,y)=\varphi(\xi)\,e^{-2|\xi|y}$$

$$u(x,y)=\mathcal{F}^{-1}\left[\varphi(\xi)\,e^{-2|\xi|y}\right].$$

3b. Steg 1. Vi gör konforma avbildningen $w = z^2$. Med detta transformeras problemet till kvarten $\arg w \in (0, \frac{\pi}{2})$ med randvillkoren $u(x,0) = 1$, $0 < x < 16$, $u(x,0) = -1$, $x > 16$, normalderivatan $= 0$ på y-axeln.

Steg 2 Vi fortsätter $\underline{u}$ till den andra kvarten $\arg w \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ som en jämn funktion av x. Vi kommer till problemet i halvplanet

$$\Delta u = 0, \quad y > 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} -1, & x < -16 \\ 1, & -16 < x < 16 \\ -1, & x > 16 \end{cases}$$

Det problemet lösas på vanligt sätt och slutligen används den inversa konforma avbildningen.

4. Separerar variabler:

$u = X(x)T(t)$

$$\frac{T''+4T}{T} = \frac{X''+2X'}{X} = -\lambda^2$$

$$X''+2X'+\lambda^2 X = 0$$

transformerar till ett standart S-L problem

$$e^{-2x}\left(e^{2x}X'\right)' + \lambda^2 X = 0$$

$$\left(e^{2x}X'\right)' + e^{2x}\lambda^2 X = 0 \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ viktfunctionen e^{2x}.

Förberedelsesteget krävs eftersom randvillk. är icke-homogena.

$u = v + w$, $v(x) = \sin x$ satisf. randvillk.

W: $w_{xx} + 2w_x - w_{tt} - 4w = +\sin x - 2\cos x - 4\sin x$

$$\boxed{\begin{array}{l} w_x(0,t) = w_x(\pi,t) = 0, \quad w(x,0) = -\sin x, \\ w_t(x,0) = 0 \end{array}} \quad (3)$$

Löser egenvärdeproblemet (2) med randvillkoren $X'(0) = X'(\pi) = 0$

Karakt. ekv. $p^2+2p+\lambda^2 = 0$

$p^2+2p+1 = 1-\lambda^2$

$(p+1)^2 = 1-\lambda^2$

$p+1 = \pm\sqrt{1-\lambda^2}$

$p = -1 \pm \sqrt{1-\lambda^2}$.

Värdena av p och av λ hittas ur randvillkoren.

Allmäna lösningen.

$$X(x) = A e^{-x+\sqrt{1-\lambda^2}\,x} + B e^{-x-\sqrt{1-\lambda^2}\,x}$$

$$X'(0) = X'(\pi) = 0$$

På ett vanligt sätt hittar

$$X_n, \lambda_n \ldots$$

Efter detta söker

$$w(x,t) = \sum T_n(t)\, X_n(x)$$

sätter in i ekvationen (3)

och får ekvationerna för $T_n(t)$.

$T_n(0)$ hittas ur begynnelsevillkoren.

Vid integreringen glöm inte om vikten!

5. Funktionen $\hat{f}(\xi)$ är cos-F-transformation av

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{1+x^2} + \frac{e^{-x}}{1+x^2}, & 0<x<2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$$

Enligt inversionssatsen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \cos \xi x \, d\xi = 2 \int_{0}^{\infty} \hat{f}(\xi) \cos(\xi x) \, dx$$

$$= \begin{cases} f(x), & f \text{ är kontin. i } x \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & f \text{ är icke-kont. i } x. \end{cases}$$

$x = 1$ - kontinuerlig

$x = 2$ - icke-kontin.

$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$ hittas med hjälp av Plancherel

6. Separerar variabler i ekvationen

$$u = X(x)\,T(t)$$

$$\frac{x X_{xx} + (1-x) X_x}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda$$

$$x X_{xx} + (1-x) X_x + \lambda X = 0$$

$$x \in (0,\infty),$$

Egenfunktioner

$X_n(x) = L_n(x)$ - Laguerre polynom.

De är ortogonala på $(0,\infty)$ med vikten e^{-x}; egenvärden är $\lambda_n = n$

lösningen $u(x,t)$ söks som

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\, e^{-nt} \cdot A_n.$$

A_n söks ur begynnelsevillkor

$$u(x,0) = \sum L_n(x)\, A_n = e^{-x}$$

$$A_n = \int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) \cdot e^{-x}\, dx.$$