Fourieranalys MVE030
2009-03-13 Lösningar

1. Intervallet $(0,\infty)$ och vikten $w(x) = xe^{-x}$ hänvisar på Laguerrepolyn. L_n^1. Så, ges bästa approximation av

$$P = c_0 L_0^1 + c_1 L_1^1 + c_2 L_2^1 + c_3 L_3^1$$

där $$c_n = \frac{\langle e^{-2x}, L_n^1 \rangle_w}{\| L_n^1 \|_w^2}.$$

Täljaren beräknas som vi gjorde på övningen, 6.5:6, nämnaren tas ur Beta eller Folland, $\| L_n^1 \|_w^2$

$$= \frac{\Gamma(n+2)}{n!} = n+1.$$

2 Enligt Parseval och faltningformel,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_\alpha * f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}_\alpha(\omega)\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

beräknas direkt, resultat har olika formen för $\alpha \le 1$, $\alpha \in [1, 4]$ och $\alpha > 4$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_\alpha * f(t) * f(t)|^2 dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}_\alpha(\omega)\hat{f}(\omega)\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} |\hat{f}(\omega)|^4 d\omega.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos t\, dt = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{it} dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-it} dt\right]$$

$= \frac{1}{2}\left[\hat{f}(1) + \hat{f}(-1)\right]$. Dessa värden är ej angivna i villkor, så använder man inversionssatsen för $\hat{f}$ som säger att integraler ovan konvergerar mot $\frac{\hat{f}(\pm 1+0) + \hat{f}(\pm 1-0)}{2}$.

3. Vi gör Laplacetransform i t-~~led~~ (alla andra gör fel). För $V(x,s) = \mathcal{L}\, u(x,t)$, får vi problemet

$$s\,V(x,s) - \sin x = V_{xx}$$

$$V(0,s) = \mathcal{L}(\sin(2t)e^{-t}) = \frac{2}{(s+1)^2+4}$$

Löser x-ekvation. Homogena lösningen:

$$V_h = Ae^{\sqrt{s}x} + Be^{-\sqrt{s}x}$$

Väljer $-\sqrt{s}$, om $\sqrt{s}$ betyder gren av s med $\mathrm{Re}\sqrt{s} > 0$, för att garantera att V blir begränsad. Partikulära lösningen blir $U_p(x,s) = \frac{\sin x}{s+1}$

så $$V(x,s) = B(s)\,e^{-\sqrt{s}x} + \frac{\sin x}{s+1}$$

$B(s)$ hittas ur randvillk. $x=0$

$$V(0,s) = B(s) = \frac{2}{(s+1)^2+4}$$

$$V(x,s) = \frac{2}{(s+1)^2+4}e^{-\sqrt{s}x} + \frac{\sin x}{s+1}$$

<u>Inverterar:</u> och använder faltningen

$$V(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\tau}\sin 2\tau\,(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}\,d\tau - \sin x\, e^{-t}$$

4. Söker lösningen oberoende av θ.
Förberedelsesteget krävs inte eftersom z-led har homogena randvillkor. Separerar variabler!

$$\frac{R'' + r^{-1} R'}{R} = -\frac{Z'' + Z}{Z} = \mu^2$$

Löser Z-problemet

$$Z'' + (\mu^2 + 1) Z = 0 \; ; \; Z(0) = Z(1) = 0$$

Egenvärden $\mu_n^2 + 1 = (n\pi)^2$, $Z(z) = \sin(n\pi z)$

Löser R-ekv.

$$R_n'' + r^{-1} R_n' - (\mu_n^2) R_n = 0$$

Modifierade Besselekvation ordn. 0
Lösningar $R_n = A_n I_0(\mu_n r) + B_n K_0(\mu_n r)$
K_0 ingår inte eftersom lösningen måste vara begränsad i 0.

so, $U(r,z) = \sum A_n I_0(\mu_n r) \sin(n\pi z)$

A_n söks ur randvillkor

$$U(1,z) = \sum A_n I_0(\mu_n) \sin(n\pi z) = 1 - z^2$$

multiplicerar med $\sin(k\pi z)$ och integrerar:

$$A_k I_0(\mu_k) \cdot \frac{1}{2} = \int_0^1 (1-z^2) \sin(k\pi z) dz$$

5. $u_t = [(1-x^2)u_x]_x$

I punkter $x = \pm 1$ försvinner koefficienten $(1-x^2)$. I sådana punkter, där problemet är singul., sätter man randvillkoren: $u(\pm 1, t)$ ändlig.

Separerar variabler

$$\frac{T'}{T} = \frac{((1-x^2)X')'}{X} = -\mu^2.$$

X-ekvationen är Legendre

Egenfunktioner $P_n(x)$, egenvärden $\mu^2 = n(n+1)$.

Lösningen $u(x,t)$ söks som

$$u(x,t) = \sum T_n(t) P_n(x) \quad ; T_n' + \mu_n^2 T_n = 0$$

$T_n(0)$ söks ur begynnelsevillkor

$$T_n(0) = \frac{\int_0^1 x^2 P_n(x)\,dx}{\| P_n(x) \|^2}$$

nämnaren $= \frac{2}{2n+1}$, täljaren beräknas med hjälp av formeln $P_n = \frac{1}{2n+1}(P_{n+1}' - P_{n-1}')$ och partiellintegrering, som i Folland, 6.2:7, 8.

6. ~~Bessel-ekvation~~ separeras θ-beroende. Söker lösningen på formen

$$u(r,\theta,t) = v(r,t)\sin\theta$$

kommer till

$$v_{tt} = v_{rr} + r^{-1}v_r - r^{-2}v$$

$$v(r,0)=0,\ v_t(r,0)=0,\ v(1,t)=1.$$

Förberedelsesteget krävs, söker

$$v(r,t) = r + w(r,t)$$

(några försökte med $1+w(r,t)$, men det leder till hårda beräkningar)

w satisfierar problemen

$$w_{tt} = w_{rr} + r^{-1}w_r - r^{-2}w$$

$$w(r,0)=r,\ w_t(r,0)=0,\ w(1,t)=0$$

separeras variabler

$$\frac{T''}{T} = \frac{R''+r^{-1}R'-r^{-2}R}{R} = -\mu^2$$

R-ekvation är Bessel, ordning 1

Egenvärden μ_n, nollställen av $J_1(x)$

egenfunktioner $R_n(r) = J_1(\mu_n r)$

~~T~~ Lösningen söks som $u(r,t) = \sum T_n(t)R_n(r)$

för $T_n(t)$ har ekvationen $T_n'' + \mu_n^2 T = 0$.

$T_n = A_n \sin\mu_n t + B_n\cos\mu_n t$. A_n, B_n hittar ur begynnelsevillk. $A_n = 0$,

$$B_n = \frac{\int_0^1 r^2 J_1(\mu_n r)\,dr}{\|J_1(\mu_n r)\|^2}.$$