Hjälpmedel: Beta, Standard Math. Tables, typgodkänd räknedosa
MATEMATIK
Telefon: Marcus Warfheimer 0762-721860
Chalmers tekniska högskola
2009–03–13 kl. 08.30–13.30, 5 timmar

Fourieranalys F2/Kf2, MVE030, 6 poäng

OBS! Ange kod, kurskod samt linje.

---

1. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst tredje graden som minimerar

$$\int_0^\infty (e^{-2x} - P(x))^2 x e^{-x} dx.$$

2. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformation $\hat{f}(\omega)$, där

$$\hat{f}(\omega) = 0, |\omega| < 1, \ \hat{f}(\omega) = 1, 1 < |\omega| < 4, \ \hat{f}(\omega) = \omega^{-1}, |\omega| \geq 4.$$

För $\alpha > 0$ definieras funktionen $g_\alpha(t)$ som $\frac{\sin(\alpha t)}{\pi t}$. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} |(g_\alpha * f)(t)|^2 dt$, $\int_{-\infty}^{\infty} |(g_\alpha * f * f)(t)|^2 dt$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos t dt$.

3. Hitta en begränsad lösning till värmeekvationen $u_t = u_{xx}$ för $0 < x$, $0 < t$, med randvillkoren $u(0,t) = \sin(2t)e^{-t}$ och begynnelsevillkoren $u(x,0) = \sin(x)$. Komplicerade integraler behövs inte att räkna. `Led: Välj mellan Laplace- och Fouriertransformation.`

4. Lös ekvationen $\Delta u + u = 0$ i cylinder $r < 1$, $z \in (0,1)$ (i cylindriska koordinater r, θ, z) med randvilllkoren $u_z(r, \theta, 0) = 0$, $u(r, \theta, 1) = 0$ och $u(1, \theta, z) = 1 - z^2$.

5. Betrakta diffusionsekvation $u_t = ((1 - x^2)u_x)_x$, $x \in (-1, 1)$ med begynnelsevillkoren $u(x, 0) = f(x)$ där $f(x) = x^2, x > 0; f(x) = 0, x \leq 0$. (Problemet beskriver diffusion i en icke-homogen substans.) Vilka randvillkor måste man sätta i punkterna ± 1? Hitta lösningen på formen av en serie i passande ortogonala funktioner och beräkna koefficienter. `Led: Använd några av ortogonala polynomsystem.`

6. Lös vågekvation $u_{tt} = \Delta u$ i disken $r < 1$, med randvillkoren $u(1, \theta, t) = \sin(\theta)$ och begynnelsevillkoren $u(r, \theta, 0) = 0, u_t(r, \theta, 0) = 0$. `Led: Sök lösningen med något bestämt beroende på` θ.

7. Berätta om regler för integrering och derivering av Fourierserier. Ge bevis och exempel. Var tilämpas reglerna?

8. Berätta så mycket som du kan om dynamiska system, deras karakteristiker, egenskaper, och typiska problem för sådana system.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas den 25. mars. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 20.mars. Om granskningen se info på kursens webbsida.

Lycka till. **Grigori Rozenblioum**