Hjälpmedel: Beta, Standard Math. Tables, typgodkänd räknedosa
MATEMATIK
Telefon: David Witt Nyström 0762-721860
Chalmers tekniska högskola
2009–08-27 kl. 08.30–13.30

Fourieranalys F2/Kf2, MVE030, 6 poäng

OBS! Ange kod, kurskod samt linje

OBS! Ange kod, kurskod samt linje.

1. Hitta i formelsamlingen eller beräkna själv utvecklingen i trigonometriska F-serie för funktionen $f(\theta) = 0$, $-\pi < \theta < 0$; $f(\theta) = \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Med valet av ett passande värde av θ och/eller Parceval, beräkna summan $\sum \frac{1}{(2n-1)^2}$. Vilken summa får man om man sätter $\theta = \pi/2$ i serien? Vilken utveckling får man med termvis integrering? Vad får man med hjälp av Parceval till den integrerade serie? Föreslå något funktion $g(\theta)$ så att man kan termvis derivera serien för $f + g$ och hitta suman till den deriverade serien.

2. Med hjälp av fouriermetoden hitta en lösning $u(r, \theta, z)$ av randvärdeproblem för Laplaceekvationen $\Delta u(r, \theta, z) = 0$ i cylindern $r < 5$, $0 \leq z < 5$ bivillkoren $u(r, \theta, 0) = x^2 - y^2$, $u(r, \theta, 5) = 0$. **Tips: Framstäl $x^2 - y^2$ i polära koordinater sök lösningen på speciella formen med θ- beroende separerat**, $u(r, \theta, z) = v(r, z)h(\theta)$ med en anpassad funktion h

3. Bestäm ett polynom $Q(x)$ av högst tredje graden som minimerar
$$\int_{-\infty}^{\infty} (Q(x) - e^x)^2 e^{-x^2} dx.$$

4. Lös med hjälp av utvecklingen i Fourier serie i egenfunktioner av ett passande Sturm-Liouville problem ekvationen
$$u_{tt} + 4u = u_{xx} - u_x, 0 < x < \pi, t > 0$$
med randvillkoren $u_x(0, t) = 1, u(\pi, t) = -1$ och begynnelsevillkoren $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$.

5. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega) = \frac{\omega\theta(\omega)}{(1+\omega^2)^2}$ där $\theta(\omega)$ är Heavisides funktion. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-|2t|}\operatorname{sgn} t dt$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(3t)dt$.

6. Lös ekvationen $u_{xx} + u_{yy} - 4u = 0$ i rektangeln $x \in (0, \pi), y \in (0, 2\pi)$ med randvillkoren $u(x, 2\pi) = x(\pi - x), x \in (0, \pi)$, $u = 0$ på resten av randen. Använd F-serie i något led.

7. Formulera och konvergenssatsen för trigonometriska fourierserier. Bevisa satsen för fallet kontinuerliga funktionen.

8. Berätta så mycket som du kan om samplingsprocessen, samplingsteorem och tillämpningar.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas den 12. september. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 29.aug.