

**Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2  
och Fouriermetoder MVE290 för TM2**

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa samt BETA eller Standard Math.  
Tables

1. Bestäm en lösning till värmeledningsekvationen  $u_t = ku_{xx}$  i kvadranten  $x, t > 0$  med randvillkoren  $u(x, 0) = 0$  och  $u(0, t) = 1/\sqrt{t}$ .
2. (a) Visa att funktionerna  $(\phi_n)_1^\infty$  bildar ett ortogonalsystem i  $L^2(\mathbb{R})$  om och endast om detsamma gäller för Fouriertransformerna  $(\widehat{\phi}_n)_1^\infty$ .  
(b) Visa att ett ortogonalsystem  $(\phi_n)_1^\infty$  i  $L^2(\mathbb{R})$  är fullständigt om och endast om  $(\widehat{\phi}_n)_1^\infty$  är fullständigt.  
(c) Ge exempel på ett fullständigt ortogonalsystem i  $L^2(\mathbb{R})$ . (Man behöver inte bevisa fullständigheten.) Ledning: En möjlighet är att börja med att dela in linjen i intervall.  
Deluppgifterna a, b och c är värda 2, 2 resp. 4 poäng.
3. Lös Dirichlets problem  $\Delta u = 0$  i kvadraten  $0 < x, y < L$  med randvärdena

$$u(x, 0) = 1, \quad u(x, L) = 0, \quad u(0, y) = 1 + y, \quad u(L, y) = 0.$$

4. Betrakta Sturm-Liouville-problemet  $f'' + \lambda f$  i intervallet  $[0, 4]$  med randvärdena  $f'(0) = 0$  och  $2f(4) - f'(4) = 0$ . Låt  $(\lambda_k)_1^\infty$  vara egenvärdena uppräknade i växande ordning. Ange ett approximativt värde på  $\lambda_3$  genom att bestämma ett heltal  $n$  sådant att  $|\lambda_3 - n| < 1$ .

5. Finn en begränsad lösning till Laplaces ekvation i polär form

$$u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0$$

i sektorn  $0 < r < R$ ,  $0 < \theta < \beta$ , med randvillkoren  $u(r, 0) = 0$ ,  $u(r, \beta) = 0$  och  $u(R, \theta) = \theta^3$ . Här är  $0 < \beta < \pi$ .

6. Lös värmeledningsekvationen  $u_t = k\Delta u$  i cirkelskivan  $r < \rho$  med randvillkoret  $u(\rho, \theta, t) = 0$  för alla  $\theta$  och  $t$  och med begynnelsevillkoret  $u(r, \theta, 0) = h(r)(1 + \cos \theta)$ . Här är  $r, \theta$  polära koordinater,  $k > 0$  en konstant och  $h(r)$  en given funktion.
7. Formulera samplingsatsen.
8. Berätta om ortogonalpolynom i ett viktat rum  $L_w^2(a, b)$ : definition, konstruktion, entydighet.