

**LÖSNINGAR TILL**  
**tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2**  
**och Fouriermetoder MVE290 för TM2**

1.

Fourierserien för funktionen  $\cos \alpha x$  i  $[-\pi, \pi]$  fås ur BETA 13.1 (15):

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} + \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2 - \alpha^2}.$$

Denna funktion, fortsatt till en  $2\pi$ -periodisk funktion på hela linjen, är kontinuerlig och styckvis glatt. (Kontinuiteten i  $\pi$  följer av att funktionen är jämn.) Därför konvergerar Fourierserien i alla punkter, mot funktionens värde. I punkten  $x = 0$  får vi

$$1 = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} + \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \alpha^2}.$$

Det följer att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha \sin \alpha \pi} - \frac{1}{2\alpha^2}.$$

Med  $x = \pi$  får man på liknande sätt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi \cot \alpha \pi}{2\alpha}.$$

För den tredje serien kan man använda Parsevals formel, som i BETA 13.1, översta formeln i rutan med Parsevals identiteter, med  $T = 2\pi$ . Man får

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \alpha x \, dx \\ = \left( \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - \alpha^2)^2}. \end{aligned}$$

Integralen här räknas ut via  $\cos^2 \alpha x = (1 + \cos 2\alpha x)/2$  och blir  $\pi + (2\alpha)^{-1} \sin 2\alpha\pi$ . Detta ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - \alpha^2)^2} = -\frac{1}{2\alpha^4} + \frac{\pi^2}{4\alpha^2 \sin^2 \alpha\pi} + \frac{\pi \sin 2\alpha\pi}{8\alpha^3 \sin^2 \alpha\pi},$$

där sista termen kan förenklas till  $\pi \cot \alpha\pi/4\alpha^3$ .

Ett annat, elegant sätt att bestämma den tredje summan är att utgå från formeln för den andra summan som vi härledde, och derivera båda leden med avseende på parametern  $\alpha$ .

2.

Eftersom den inhomogena termen  $\cos x$  i differentialekvationen inte beror av  $t$ , kan man använda steady state-metoden. Det innebär att först finna en  $t$ -oberoende lösning  $u_0(x)$  till differentialekvationen som dessutom har rätt randvärden i ändpunkterna 0 och  $\pi$ . Man får  $u_0''(x) = -k^{-1} \cos x$  så att  $u_0(x) = k^{-1} \cos x + ax + b$ , och randvärdena ger  $u_0(x) = k^{-1} \cos x - k^{-1} + 2x/(\pi k)$ .

Nu sätter vi  $u(x, t) = u_0(x) + v(x, t)$  och söker  $v$ , som måste vara en lösning till problemet

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx}, \\ v(0, t) = 0, \quad v(\pi, t) = 0, \\ v(x, 0) = (1 - k^{-1}) \cos x + k^{-1} - 2x/(\pi k). \end{cases}$$

Detta är ett standardproblem, som löses med utveckling i sinusserier. För att utveckla de tre termerna i initialvärdet  $v(x, 0)$  ovan, kan man använda formlerna (11), (25) (som är enklare än (2)), och (12) i BETA 13.1. Man får

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= (1 - k^{-1}) \frac{8}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin 2nx \\ &+ \frac{4}{k\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} - \frac{4}{k\pi} \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}. \end{aligned}$$

Här ser man att de udda termerna i den tredje summan sammanfaller med termerna i den andra summan, så att

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= (1 - k^{-1}) \frac{8}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin 2nx + \frac{4}{k\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{8kn^2 - 2}{kn(4n^2 - 1)} \sin 2nx. \end{aligned}$$

Därför ges  $v$  av

$$v(x, t) = \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{8kn^2 - 2}{kn(4n^2 - 1)} e^{-4kn^2 t} \sin 2nx.$$

Den sökta funktionen  $u$  blir alltså

$$u(x, t) = v(x, t) + u_0(x) = v(x, t) + k^{-1}(\cos x - 1) + 2x/(\pi k)$$

med ovanstående  $v$ .

3.

Med  $f(x) = 1/(1+x^2)$  har man enligt tabell  $\hat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$ , och  $LP_\alpha(1/(1+x^2))$  har alltså Fouriertransformen  $\pi e^{-|\xi|} \chi_{(-\alpha, \alpha)}(\xi)$ . Enligt Fouriers inversionsformel är  $LP_\alpha(1/(1+x^2))$  då

$$\frac{1}{2\pi} \pi \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-|\xi|} e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} e^{-\xi+ix\xi} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} e^{-\xi-ix\xi} d\xi,$$

där vi bytte variabel  $\xi \mapsto -\xi$  i integralen mellan  $-\alpha$  och  $0$ . Men detta är detsamma som

$$\begin{aligned} \Re \int_0^\alpha e^{-\xi+ix\xi} d\xi &= \Re \frac{e^{-\alpha+iax} - 1}{-1 + ix} \\ &= \Re \frac{(e^{-\alpha}(\cos \alpha x + i \sin \alpha x) - 1)(-1 - ix)}{1 + x^2} \\ &= \frac{1 - e^{-\alpha} \cos \alpha x + x e^{-\alpha} \sin \alpha x}{1 + x^2}, \end{aligned}$$

som är svaret. Imaginärdelen blir alltså  $0$ .

4.

För detta Dirichletproblem i ett ringformat område vet man att variabelseparation leder till en lösning med serieutveckling av typ

$$(1) \quad u(r, \theta) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{in\theta} (a_n r^n + b_n r^{-n}).$$

(Se annars härledningen i Folland 4.4, formel (4.33).) De givna randvärdena leder till

$$\frac{b_0}{R_0} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{in\theta} n (a_n R_0^{n-1} - b_n R_0^{-n-1}) = 1$$

och

$$a_0 + b_0 \ln R_1 + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{in\theta} (a_n R_1^n + b_n R_1^{-n}) = |\theta|,$$

ekvationer som ska gälla för alla  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Därför utvecklar vi högerleden i Fourierserier och identifierar koefficienterna i varje ekvation. Konstanten  $1$  är sin egen Fourierserie, så man får  $b_0/R_0 = 1$  och  $a_n R_0^{n-1} - b_n R_0^{-n-1} = 0$  för alla  $n \neq 0$ . Fourierserien för  $|\theta|$  är enligt BETA 13.1 (3) med  $\alpha = 1$  och  $L = h = \pi$

$$|\theta| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_1^\infty \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)\theta.$$

Detta skriver vi om som

$$|\theta| = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \text{ udda}} \frac{1}{n^2} e^{in\theta}.$$

Därför blir  $a_0 + b_0 \ln R_1 = \pi/2$  och  $a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = 0$  för jämna  $n \neq 0$ , medan  $a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = -2/(\pi n^2)$  för udda  $n$ . För varje  $n$  har vi nu två ekvationer för  $a_n$  och  $b_n$ , och man får lätt att  $a_0 = \pi/2 - R_0 \ln R_1$  och  $b_0 = R_0$ . För jämna  $n \neq 0$  blir  $a_n = b_n = 0$ , medan för udda  $n$

$$a_n = -\frac{2}{\pi n^2} \frac{R_1^n}{R_0^{2n} + R_1^{2n}}$$

och

$$b_n = -\frac{2}{\pi n^2} \frac{R_1^{-n}}{R_0^{-2n} + R_1^{-2n}}.$$

Dessa värden ska stoppas in i uttrycket (1), men först observerar vi att  $b_n = a_{-n}$  för dessa  $n$ . Den del av summan i (1) som innehåller  $b_n$  kan därför skrivas, efter ett teckenbyte  $n \mapsto -n$ ,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \text{ udda}} e^{-in\theta} a_n r^n.$$

Svaret blir därför

$$u(r, \theta) = \frac{\pi}{2} - R_0 \ln R_1 + R_0 \ln r - \frac{4}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \text{ udda}} \frac{R_1^n r^n}{n^2 (R_0^{2n} + R_1^{2n})} \cos n\theta.$$

5.

Transformationen  $x = t/3$  tar oss till intervallet  $-1 \leq t \leq 1$ , där vi vet att ortogonalpolynomen, med vikt 1, är Legendrepolynomen  $P_n(t)$ . Med  $P(x) = Q(t)$  ska vi minimera

$$\frac{1}{3} \int_{-1}^1 \left| \sin \frac{t}{3} - Q(t) \right|^2 dt,$$

där faktorn  $1/3$  är betydelselös. Enligt satsen om bästa approximation blir det minimerande polynomet

$$Q(t) = \sum_0^2 c_n P_n(t),$$

där

$$c_n = \frac{1}{\|P_n\|^2} \int_{-1}^1 \sin \frac{t}{3} P_n(t) dt.$$

Här tas normen i rummet  $L^2[-1, 1]$ . Polynomet  $Q$  är en ortogonalprojektion. För jämna  $n$  är  $P_n(t)$  en jämn funktion, så integralen blir 0. Då återstår bara fallet  $n = 1$ , med  $P_1(t) = t$  (tabell) och  $\|P_1\|^2 = 2/3$ . Efter en partialintegration får man

$$c_1 = \frac{3}{2} \left( -6 \cos \frac{1}{3} + 18 \sin \frac{1}{3} \right) = 27 \sin \frac{1}{3} - 9 \cos \frac{1}{3}.$$

Då ger  $Q(t) = c_1 t$  att

$$P(x) = Q(t) = 3c_1 x = \left( 81 \sin \frac{1}{3} - 27 \cos \frac{1}{3} \right) x.$$

För att teckenstudera  $\sin x - P(x)$  observerar vi att  $\sin x$  är konkav i  $[0, 1/3]$ . Genom att rita en enkel figur ser man därför att påståendet i b) följer om linjen  $y = P(x)$  skär kurvan  $y = \sin x$  i någon punkt i det öppna intervallet  $(0, 1/3)$ , eftersom båda går genom origo. Att de skär varandra kan man verifiera numeriskt. Men det är nog enklare att utesluta motsatsen med följande argument: Om de inte skär varandra, skulle skillnaden  $\sin x - P(x)$  ha konstant tecken i  $(0, 1/3)$ . Eftersom  $P$  liksom  $Q$  är en ortogonalprojektion, är  $\sin x - P(x)$  ortogonal mot  $P_1(t) = 3x$  i intervallet  $(-1/3, 1/3)$ , så att

$$\int_{-1/3}^{1/3} (\sin x - P(x))x dx = 0.$$

Här är integranden jämn, så man har också

$$\int_0^{1/3} (\sin x - P(x))x dx = 0.$$

Av denna likhet följer att  $\sin x - P(x)$  inte kan ha konstant tecken i  $(0, 1/3)$ , och saken är klar.

6.

Vågekvationen blir i polära koordinater

$$u_{tt} = c^2 \left( u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right).$$

Variabelseparation  $u(r, \theta, t) = T(t)R(r)\Theta(\theta)$  ger

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{R''(t) + r^{-1}R'(t)}{R(t)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = m,$$

för någon konstant  $m$ . För  $T$  får vi den enkla ekvationen

$$T''(t) = c^2 m T(t) = 0.$$

Det första av de givna initialvillkoren medför att  $T(0) = 0$ . Om  $m > 0$  blir då  $T(t)$  en multipel av  $\sinh c\sqrt{m}t$ . Det skulle innebära att membranets svängningar växer obegränsat med tiden, och så kan ett membran inte bete sig. Fallet  $m = 0$  ger en multipel av  $t$ , något som också är fysikaliskt orimligt. Alltså är  $m < 0$ . Vi skriver då  $m = -\mu^2$  med  $\mu > 0$ , och  $T(t)$  blir en multipel av  $\sin c\mu t$ . (Den som på denna punkt föredrar ett mer matematiskt än fysikaliskt resonemang kan läsa parenteserna nedan.)

Den andra likheten i den dubbla ekvationen ovan medför

$$\frac{r^2 R''(t) + rR'(t) + \mu^2 r^2 R(t)}{R(t)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \nu^2,$$

med en ny konstant  $\nu$ . För  $\Theta$  får vi

$$\Theta''(\theta) + \nu^2 \Theta(\theta) = 0,$$

och eftersom  $\Theta$  är  $2\pi$ -periodisk ser vi först att  $\nu^2$  måste vara positivt eller 0, så att talet  $\nu$  är reellt. Sen får vi också att  $\nu$  måste vara ett heltal, som kan antas ickenegativt. Vi skriver då  $\nu = n \in \{0, 1, \dots\}$ , och ser att  $\Theta(\theta)$  är en linjärkombination av  $\cos n\theta$  och  $\sin n\theta$ .

Ekvationen för  $R$  blir

$$r^2 R''(t) + rR'(t) + (\mu^2 r^2 - n^2)R(t) = 0.$$

Detta är Bessels differentialekvation, med lösningar som är linjärkombinationer av  $J_n(\mu r)$  och  $Y_n(\mu r)$ . Randvillkoret

$u(r_0, \theta, t) = 0$  medför att  $R(r_0) = 0$  och att  $R(r)$  är begränsad även vid  $r = 0$ . Därför kan vi utesluta  $Y_n(\mu r)$  och få att  $R(r)$  måste vara en multipel av  $J_n(\mu r)$ , med ett sådant  $\mu$  att  $\mu r_0$  är ett nollställe till  $J_n$ .

(Här utgick vi från att  $m = -\mu^2 < 0$ , så att  $\mu$  är reellt och kan väljas positivt. Men  $m > 0$  skulle innebära  $\mu$  är rent imaginärt och att  $R(r)$  blir en linjärkombination av  $I_n$  och  $K_n$ . Då kan vi först utesluta  $K_n$  som är singular i 0 och sen  $I_n$  som inte har något nollställe på  $\mathbb{R}_+$ . Och fallet  $m = 0$  ger en Eulerekvation med lösningar som är linjärkombinationer av  $r^n$  och  $r^{-n}$ , resp. av 1 och  $\ln r$  för  $n = 0$ . Då utesluts  $r^{-n}$  och  $\ln r$  av begränsningsvillkoret vid 0, och randvärdet 0 i  $r_0$  gör sedan även detta fall omöjligt.)

Om  $\lambda_{kn}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , betecknar de positiva nollställena till  $J_n$ , har vi alltså  $\mu = \lambda_{kn}/r_0$  för något  $k$ . Det ovanstående innebär därför att de separerade lösningarna är av formen

$$\sin \frac{c\lambda_{kn}t}{r_0} J_n \left( \frac{\lambda_{kn}r}{r_0} \right) (a \cos n\theta + b \sin n\theta).$$

Lösningen till det givna problemet är en summa

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{c\lambda_{kn}t}{r_0} J_n \left( \frac{\lambda_{kn}r}{r_0} \right) (a_{kn} \cos n\theta + b_{kn} \sin n\theta). \end{aligned}$$

För att bestämma koefficienterna  $a_{kn}$  och  $b_{kn}$  använder vi det andra initialvillkoret. Genom att derivera med avseende på  $t$  och sen sätta  $t = 0$  får man

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{c}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{kn} J_n \left( \frac{\lambda_{kn}r}{r_0} \right) (a_{kn} \cos n\theta + b_{kn} \sin n\theta) \\ = (r_0 - r)(\pi - |\theta|). \end{aligned}$$

Nu vet man att funktionerna  $r \mapsto J_n(\lambda_{kn}r/r_0)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , bildar ett fullständigt ortogonalsystem på intervallet  $(0, r_0)$  med vikten  $w(r) = r$ , se BETA 12.4 "Orthogonal series ...". Eftersom högerledet i (2) är jämnt i  $\theta$ , kommer  $b_{kn}$  att bli 0. Koefficienterna  $a_{kn}$  kan man få genom att kombinera formeln



för koefficienterna i utvecklingar i dessa Besselfunktioner med den vanliga koefficientformeln för cosinusserier. Det är dock aningen enklare att utnyttja att högerledet är en produkt av en funktion av  $r$  och en av  $\theta$ , och utveckla den senare med hjälp av tabell. Man får, t ex enligt BETA 13.1 (6) med  $h = L = \pi$ ,

$$\pi - |\theta| = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)\theta}{(2m-1)^2}.$$

Det betyder att vi kan se (2) som en likhet mellan två cosinusserier och identifiera koefficienterna, vilket ger

$$\frac{c}{r_0} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k0} J_0 \left( \frac{\lambda_{k0} r}{r_0} \right) a_{k0} = (r_0 - r) \frac{\pi}{2}$$

för  $n = 0$ . För jämna  $n \neq 0$  blir  $a_{kn} = 0$  och för udda  $n$  får man

$$\frac{c}{r_0} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{kn} J_n \left( \frac{\lambda_{kn} r}{r_0} \right) a_{kn} = (r_0 - r) \frac{4}{\pi n^2}.$$

Nu kan vi använda formeln för Besselkoefficienter (BETA 12.4 igen) och få

$$a_{k0} = \frac{\pi}{cr_0 \lambda_{k0} J_1(\lambda_{k0})^2} \int_0^{r_0} (r_0 - r) J_0 \left( \frac{\lambda_{k0} r}{r_0} \right) r dr,$$

och

$$a_{kn} = \frac{8}{\pi cr_0 n^2 \lambda_{kn} J_{n+1}(\lambda_{kn})^2} \int_0^{r_0} (r_0 - r) J_n \left( \frac{\lambda_{kn} r}{r_0} \right) r dr$$

för udda  $n$ .

Svaret blir därför

$$u(r, \theta, t) = \sum_n \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{c \lambda_{kn} t}{r_0} J_n \left( \frac{\lambda_{kn} r}{r_0} \right) a_{kn} \cos n\theta,$$

där summan i  $n$  löper över 0 och de udda naturliga talen, och  $a_{kn}$  har de angivna värdena.