

Dynamiska system

1

Dynamiska system:

Def. Ett linjärt system $\mathcal{L}$ är en linjär avbildning från ett linjärt rum av inrägnaler till ett linjärt rum av uträgnaler:

$$1) \mathcal{L}[c_1 x_1 + c_2 x_2] = c_1 \mathcal{L}[x_1] + c_2 \mathcal{L}[x_2].$$

Vi antar också att

$$2) \mathcal{L}\left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathcal{L}[x_n]$$

$$3) \mathcal{L}\left[\int_a^b x(\alpha, t) d\alpha\right] = \int_a^b \mathcal{L}[x(\alpha, t)] d\alpha.$$

Låt $y(t) = \mathcal{L}[x(t)]$. Det linjära systemet $\mathcal{L}$ är tidsinvariant om

$$4) \mathcal{L}[x(t-T)] = y(t-T), \quad \forall T \in \mathbb{R}.$$

Def. Systemets impulsvar är uträgnalen svarande mot inrägnalen $\delta(t)$.

Sats: Om $\mathcal{L}$ är linjärt och tidsinvariant och h impulsvarret till $\mathcal{L}$.

Då gäller att

$$(a) \mathcal{L}[x(t)] = (x * h)(t)$$

$$(b) \mathcal{L}[e^{i\omega t}] = \hat{h}(\omega) e^{i\omega t}; \quad \text{för varje } \omega \in \mathbb{R}.$$

(c) Om $h(t)$ är reell, gäller för $\omega > 0$ att

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \text{Re}[\hat{h}(\omega) e^{i\omega t}]$$

OBS: Varje funktion f kan skrivas som en kombination av $\sin$ och $\cos$ funktioner.

Beris: (a) $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \xrightarrow{(1)(3)} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathcal{L}[\delta(t-\tau)] d\tau$
 $\xrightarrow{(4)} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = (x * h)(t)$

(b) Sätt $x(t) = e^{i\omega t}$

$$\mathcal{L}[x(t)] \stackrel{(a)}{=} (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = e^{i\omega t} \hat{h}(\omega)$$

(c) Sätt $x(t) = \cos \omega t$

$$\mathcal{L}[x(t)] \stackrel{(a)}{=} (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau = \text{Re}[\hat{h}(\omega) e^{i\omega t}]$$

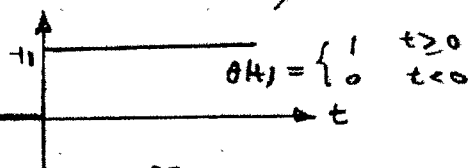
Def. Det linjära systemet kallas kausalt om uträgnalvärde vid tiden t bara beror på inrägnalvärde vid tiden $\leq t$.

Sats: Antag att $\mathcal{L}$ är linjärt & tidsinvariant. Då $\mathcal{L}$ är kausalt om och endast om $h(t) = 0$ för $t \leq 0$.

Def. Ett linjärt tidsinvariant system med impulsvar $h(t)$ kallas stabilit om $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$.

Ex: För ett linjärt tidsinvariant system gäller att ingången $\theta(t)e^{-2t}$ ger upphov till utgången $t^2\theta(t)e^{-3t}$. Vad blir ingången $y(t)$, om ingången $x(t)$ är 2π -periodisk och $x(t) = t$ för $0 < t < 2\pi$? Ange $y(t)$ i form av en komplex trigonometrisk Fourierserie.

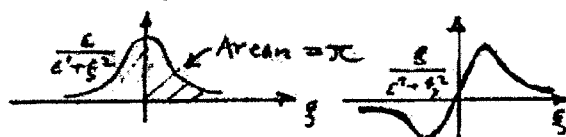
Lösning: $\theta(t)$ (som $\text{sign}(t)$) $\notin L^1$.



$$\begin{aligned} X_1(s) &\xrightarrow{\wedge} y_1(t) \\ y_1(t) &= (x_1 * h)(t) \Rightarrow \\ \hat{y}_1(s) &= \frac{\hat{y}_1(s)}{\hat{x}_1(s)} \end{aligned}$$

$$(I) = -\mathcal{E}(t) \theta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-i\frac{1}{2}\pi t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(2+i\frac{1}{2})t} dt = \frac{e^{-(2+i\frac{1}{2})t}}{-2-i\frac{1}{2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2+i\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2+i\frac{1}{2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon - i\frac{1}{2}}{\epsilon^2 + \frac{1}{4}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \frac{1}{4}} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}}{i(\epsilon^2 + \frac{1}{4})} = \pi\delta(\epsilon) + \frac{1}{i\frac{1}{2}}$$



$$\text{Let } z = 2 + i\frac{1}{2} \text{ (I) for}$$

$$x_1(t) = \theta(t)e^{-2t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2+i\frac{1}{2}} = \hat{x}_1(s)$$

$$y_1(t) = t^2\theta(t)e^{-3t} \xrightarrow{\mathcal{F}} -\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{3+i\frac{1}{2}} \right) = \frac{2}{(3+i\frac{1}{2})^3} = \hat{y}_1(s)$$

$$\mathcal{F}\text{-transform av ingångensvar: } h(t); \hat{h}(s) = \frac{\hat{y}_1(s)}{\hat{x}_1(s)} = \frac{2(2+i\frac{1}{2})}{(3+i\frac{1}{2})^3}$$

$$\text{Komplex } \mathcal{F}\text{-transform för } x(t) = t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}, \Omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$(T = \text{perioden} = 2\pi), \text{ all } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t e^{-int} dt = \begin{cases} n \neq 0 \end{cases} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t e^{-int}}{-in} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{-in} e^{-int} dt \right] = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi e^{-i2\pi n}}{-in} = -\frac{1}{in} = \frac{i}{n}$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} \right] = \pi$$

$$e^{i\frac{1}{2}t} \xrightarrow{\wedge} \hat{h}(s) e^{i\frac{1}{2}t} \text{ (med } s=n) \Rightarrow$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \xrightarrow{\wedge} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \hat{h}(n) e^{int} = y(t)$$

$$\text{Altern: } y(t) = c_0 \hat{h}(0) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \hat{h}(n) e^{int} = \frac{1}{2\pi} \pi + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{n} \frac{2(2+i\frac{1}{2})}{(3+i\frac{1}{2})^3} e^{int}$$