

MVE030 Fourieranalys F2/Kf2, 6 poäng

OBS! Ange kod, kurskod samt linje.

1. Med hjälp av utveckling i Fourier-Bessel serie hitta en radial lösning $u(r, t)$ av randvärdeproblem för värmeekvationen

$$u_t = \Delta u - u$$

i cirkelskivan $r < 2$ med begynnelsevillkoret $u(r, 0) = 4 - r^2, 1 \leq r \leq 2$, $u(r, 0) = 3, r < 1$ och randvillkoret $u(r, t) = 0$ för $r = 2$.

2. Hitta andragradpolynomet $P(x)$ som minimerar $\int_1^3 |x^3 - P(x)|^2 x^{-1} dx$. Koefficienter beräknas approximativt.
3. Lös ekvationen $u_{xx} + u_{yy} - 8u = 1$ i rektangeln $x \in (0, \pi), y \in (0, 2\pi)$ med randvillkoren $u(x, 2\pi) = \sin x - \sin(2x), x \in (0, \pi), u = 0$ på resten av randen. Använd F-serie i något led.
4. Funktionen $f(x)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\xi)$ där $\hat{f}(\xi) = 1$ på 3 intervall $2^n < x < 2^{n+1}, n = 0, 2, 4, \hat{f}(\xi) = -1$ på 3 intervall $2^n < x < 2^{n+1}, n = 1, 3, 5$, och $\hat{f}(\xi) = 0$ utanför dessa 6 intervall. Hitta $f * f * f, f * f * f * f, f * f * f * f * f, f * f * f * f * f * f$ och $\int_{-\infty}^{\infty} |f * g|^2 dx$, där $g(x) = \frac{\sin(5x)}{x}$.
5. Formulera integreringsregeln för Fourierserier. Med hjälp av den regeln och F-serien för $f(\theta) = \theta^2, \theta \in (-\pi, \pi)$ (ur BETA) bevisa att

$$\theta^4 - 2\pi^2\theta^2 = 48 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(n\theta)}{n^4} - \frac{7\pi^4}{15}$$

för $\theta \in (-\pi, \pi)$. Hitta summan av serien för $\theta = \pi, 2\pi, 4\pi$. Hur många gånger kan man derivera den ursprungliga serien?

6. Lös Dirichletproblemet i klottet $r < 1$ i \mathbb{R}^3 :

$$\Delta u(r, \theta, \phi) = 0, r < 1; u(1, \theta, \phi) = \cos(\phi), 0 \leq \phi \leq \pi/2; u(1, \theta, \phi) = 0, \pi/2 \leq \phi \leq \pi.$$

Led: använd sfäriska koordinater och Legendrepolyomen.

7. Låt $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara ett ortonormalt system i $L^2(a, b)$. Ange tre villkor som alla var för sig är ekvivalent med att $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ är ett fullständigt system (en bas) i $L^2(a, b)$ (Sats 3.4). Beviset krävs. Ge exempel på ortonormala system vilka är en bas, och vilka inte är bas. Vilka system som ni vet är ortogonala på hela axeln, på halvaxeln??
8. Berätta så mycket du kan om linjära system, deras egenskaper, karakteristiker och Fouriertransformationsbaserade analysmetoder. Ge exempel.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdiggrättas den 21. januari. Ev. granskning/visning den 25. januari, 11-13 i mitt knotor.

G.Rozenblioum

GR