MVE030 Fourier Analysis

F2, Kf 2

Tenta 2010-01-16. Lösningförslag

1. Löser i polära koordinater.

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r - u$$

Separerar variabler

$$\frac{T'}{T} = \frac{R'' + r^{-1} R' - R}{R} = -\mu^2$$

R-ekvationen lösas med Bessel:

$$R_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n r}{2}\right) \quad ; \ \mu_n \text{-nollställen av } J_0$$

$$u(r,t) = \sum J_0\left(\frac{\mu_n r}{2}\right) C_n e^{-\mu_n^2 t}$$

C_n hittar ur beg. villk.

$$C_n = \frac{1}{\left\| J_0\left(\frac{\mu_n r}{2}\right)\right\|^2} \int_0^2 J_0\left(\frac{\mu_n r}{2}\right) f(r)\, r\, dr$$

Integral räknas med rekurr. formler

2. Man tar functioner $f_0 = 1$, $f_1 = x$, $f_2 = x^2$ och ortogonaliserar med Gram-Schmidt metoden. Vi får $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ — polynom av grad 0, 1, 2.

Efter detta blir sökta polynomen

$$P = c_0 \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$$

$$c_k = \frac{\langle x^3, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle}.$$

alla skalärproducter räknas i Hilbertrummet $L_2(1,3)$ med vikten x^{-1}.

3. Söker lösningar som F-serie i x-variabel med koefficienterna beroende på y. x variabeln väljs eftersom i x variabel är randvillkor homogena.

$$u(x,y) = \sum a_n(y) \sin nx$$

Sätter in i ekvationen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-n^2 a_n(y) + a_n''(y) - 8 a_n(y)\right) \sin(nx) = 1$$

multiplicerar med $\sin kx$ och integrerar

$$(*) \quad -k^2 a_k(y) + a_k''(y) - 8 a_k(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1+(-1)^{k+1}}{k}$$

Ekvationen $(*)$ lösas med randvillkor

$$a_k(0) = 0; \quad a_k(2\pi) = \begin{cases} 1, & k=1 \\ -2, & k=2 \\ 0, & k>2 \end{cases}$$

Får uttryck genom hyperb. funktioner

4. Vi har

$$\widehat{f * \cdots * f} = \hat{f} \cdot \hat{f} \cdot \ldots \cdot \hat{f}$$

därför för vår function

$$\underbrace{f * \cdots * f}_{k} = f, \quad = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}, \quad k \text{ udda};$$

$$\underbrace{f * \cdots * f}_{k} = \mathcal{F}^{-1}|\hat{f}| \quad k \text{ jämn}$$

därför $$\underbrace{f * \cdots * f}_{\text{udda}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} \, d\xi$$

$$\underbrace{f * \cdots * f}_{\text{jämn}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)| e^{ix\xi} \, d\xi$$

Parceval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f * g|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f} \cdot \hat{g}|^2 \, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{1}^{5} d\xi.$$

5. I Beta hittas F-serie

$$\theta^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}\cos n\theta$$

$\theta \in [-\pi, \pi]$

Den första integreringen ger

$$F(\theta) = \frac{\theta^3}{3} - \frac{\pi^2}{3}\theta = C_0 + 4\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin(n\theta)$$

med $C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)\,d\theta = 0.$

Den andra integreringen ger

$$\frac{\theta^4}{12} - \frac{\pi^2}{6}\theta^2 = C_0 + 4\sum \frac{(-1)^{n+1}\cos n\theta}{n^4}$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\theta^4}{12} - \frac{\pi^2\theta^2}{6}\right)d\theta = -\frac{7\pi^4}{180}$$

$\theta \in [-\pi, \pi]$

Summan av serien är densamma i punkter $0, 2\pi, 4\pi$ osv, $=0$ eftersom ~~fu~~ serien ger en periodisk funktion.

Den första serien kan deriveras 1 gång. Vidare - går inte eftersom den första derivatan av funktionen inte är kontinuerlig.

6. I sfäriska koordinater

$$u(r,\theta,\varphi) = u(r,\varphi)$$

eftersom randdata inte beror på θ.

Efter standarta variabelbytet

$s = \cos\varphi$, kommer man till

$$u_{rr} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial s}\left((1-s^2)\frac{\partial u}{\partial s}\right) = 0$$

variabelseparation ger

$$u(r,s) = \sum a_n r^n P_n(s)$$

där P_n - Legendrepolynom.

koefficienterna a_n beräknas som

$$a_n = \frac{1}{\|P_n\|^2}\int_{-1}^{1} f(s)\, P_n(s)\, ds$$

$$f(s) = \begin{cases} s, & s>0 \\ 0, & s<0 \end{cases}$$

Sådana integral beräknades i kursen m.h.av rekurrenta formler.