MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Datum: 2010-08-26
Telefon: Magnus Goffeng
0703 - 088304
Skrivtid: 8.30 – 13.30

Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa samt BETA eller Standard Math. Tables

(maxpoäng inom parentes, med summa 61)

1. Anta $0 < \alpha < 1$. Bestäm summorna
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \alpha^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} \qquad \text{och} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - \alpha^2)^2},$$
exempelvis med hjälp av Fourierserien för funktionen $\cos \alpha x$ i $[-\pi, \pi]$. (8)

2. Lös följande problem, där k är en positiv konstant,
$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} + \cos x, & 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, & \\ u(x,0) = \cos x. & \end{cases}$$
(8)

3. Lågpassfiltret LP_α, där $\alpha > 0$, definieras som avbildningen $f \mapsto LP_\alpha(f)$ given av
$$\widehat{LP_\alpha(f)} = \hat{f}\,\chi_{(-\alpha,\alpha)}.$$
Här ges funktionen $\chi_{(-\alpha,\alpha)}$ av att $\chi_{(-\alpha,\alpha)}(\xi) = 1$ om $|\xi| < \alpha$ och $= 0$ annars. Beräkna $LP_\alpha(1/(1+x^2))$. Svaret skall ges på formen realdel $+\ i \cdot$ imaginärdel. (8)

4. Låt (r, θ) vara polära koordinater i planet och anta $0 < R_0 < R_1$. Lös problemet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & R_0 < r < R_1, \\ u_r(R_0, \theta) = 1, \;\; u(R_1, \theta) = |\theta|, & |\theta| \leq \pi. \end{cases}$$

(8)

5. a) Bestäm det polynom $P(x)$ av grad högst två som minimerar

$$\int_{-1/3}^{1/3} |\sin x - P(x)|^2 \, dx.$$

b) Visa också att det finns en punkt $x_0 \in (0, 1/3)$ sådan att $\sin x - P(x)$ är positiv i $(0, x_0)$ och negativ i $(x_0, 1/3)$. (6+2)

6. Ett cirkulärt membran med radie r_0 beskrivs av en funktion $u(r, \theta, t)$, där r, θ är polära koordinater och $|\theta| \leq \pi$. Då satisfierar u vågekvationen $u_{tt} = c^2 \Delta u$, och $u(r_0, \theta, t) = 0$ för alla θ och t. Här är $c > 0$ en konstant. Om initialvillkoren är $u(r, \theta, 0) = 0$ och $u_t(r, \theta, 0) = (r_0 - r)(\pi - |\theta|)$, vad blir u? Svaret får innehålla integraler som inte låter sig beräknas eller förenklas. (9)

7. Givet ett reguljärt Sturm-Liouville-problem, visa
a) att dess egenvärden är reella
b) att två egenfunktioner med olika egenvärden är ortogonala med avseende på viktsfunktionen. (3+3)

8. Låt f vara en periodisk funktion.
a) Ange villkor på f som garanterar att Fourierserien för f' fås genom termvis derivering av Fourierserien för f.
b) Beskriv också hur en periodisk funktions regularitet, mätt med derivators existens och kontinuitet, återspeglas i Fourierkoefficienternas storlek, och omvänt.
Inga bevis efterfrågas i denna uppgift. (3+3)