MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers Datum: 2011-01-15

LÖSNINGAR TILL
tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2
och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Uppgift 1.
Vi väljer den komplexa formen av Fourierserie $\sum c_n e^{int}$ och får med två partialintegrationer, för $n \neq 0$,

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t^2 e^{-int}\,dt \\
&= -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{in}[t^2 e^{-int}]_0^\pi + \frac{1}{i\pi n}\int_0^\pi t e^{-int}\,dt \\
&= (-1)^n \frac{i\pi}{2n} + \frac{1}{\pi n^2}[te^{-int}]_0^\pi - \frac{1}{\pi n^2}\int_0^\pi e^{-int}\,dt \\
&= (-1)^n \frac{i\pi}{2n} + (-1)^n \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n - 1}{i\pi n^3}.
\end{aligned}$$

Dessutom är

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t^2\,dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

Fourierserien blir därför

$$\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n\neq 0}(-1)^n \left(\frac{i\pi}{2n} + \frac{1}{n^2}\right) e^{int} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2ie^{i(2k-1)t}}{\pi(2k-1)^3}.$$

Den kan också skrivas på reell form:

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi^2}{6} + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{2}{n^2}\cos nt \\
&\quad + \sum_1^\infty (-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}\sin nt - \sum_1^\infty \frac{4}{\pi(2k-1)^3}\sin(2k-1)t
\end{aligned}$$

(omvandling av ovanstående eller ny räkning).

För att slippa dessa räkningar kan man i stället utnyttja tabeller. Man skriver först den givna funktionen som

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(t^2 + t|t|\right), \quad -\pi < t < \pi,$$

där $t|t|$ är den udda utvidgningen av funktionen t^2 från $(0, \pi)$ till $(-\pi, \pi)$. Denna kan man uttrycka med hjälp av funktionen i BETA 13.1 (7), som för $L = \pi$ är den udda utvidgningen av $t(\pi - t)$, alltså $\pi t - t|t|$. Sammanfattningsvis kan man då skriva f som

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(t^2 + \pi t - (\pi t - t|t|)\right), \quad -\pi < t < \pi.$$

De tre termerna i högerledet har nu Fourierserier givna av (13), (12) och (7) i BETA 13.1 med $L = \pi$, vilket ger samma reella Fourierserie som vi nyss fann.

Funktionen f är styckvis glatt. Därför konvergerar Fourierserien överallt, och dess summa är funktionens värde i alla kontinuitetspunkter, dvs. i $(-\pi, \pi)$. I diskontinuitetspunkten $\pm\pi$ är summan medelvärdet av funktionens vänster- och högergränsvärden, som är $(\pi^2 + 0)/2 = \pi^2/2$.

Uppgift 2.

Vi Laplacetransformerar i t-variabeln, vilket ger en funktion $U(x, z)$ att bestämma. Differentialekvationen transformeras till

$$z^2 U(x, z) - zu(x, 0) - u_t(x, 0) = c^2 U_{xx}(x, z),$$

som pga. de givna initialvärdena blir

$$z^2 U(x, z) - z = c^2 U_{xx}(x, z).$$

Detta är en linjär, inhomogen ordinär differentialekvation i variabeln x, för varje fixt z. En partikulärlösning ges av den konstanta funktionen $U(x, z) = 1/z$. Motsvarande homogena ekvation $z^2 U(x, z) = c^2 U_{xx}(x, z)$ har den allmänna lösningen $U(x, z) = Ae^{-zx/c} + Be^{zx/c}$, där koefficienterna A och B kan bero av z men inte av x. Vi förkastar den andra termen, som växer för snabbt i z för att vara en Laplacetransform. Som lösningar till den inhomogena ekvationen får vi då

$$U(x,z) = \frac{1}{z} + A(z)e^{-zx/c}. \tag{1}$$

Det givna randvärdet för $x = 0$ leder till att $U(0,z)$ måste vara Laplacetransformen av $1/(1+t)$. Den är enligt tabell

$$\mathcal{L}\,\frac{1}{1+t} = e^z E_1(z) \quad \text{med} \quad E_1(z) = \int_z^\infty e^{-t}/t\,dt$$

(se BETA 13.5 L56 resp. avsnittet "Exponential integrals" i BETA 12.5). Men för vårt problem behöver vi faktiskt inte veta vad $\mathcal{L}(1/(1+t))$ är. Med $x = 0$ i (1) får man

$$\mathcal{L}\,\frac{1}{1+t} = \frac{1}{z} + A(z).$$

Detta bestämmer $A(z)$ och ger att (1) kan skrivas

$$U(x,z) = \frac{1}{z} + \left(-\frac{1}{z} + \mathcal{L}\,\frac{1}{1+t}\right)e^{-zx/c}.$$

Den sökta lösningen $u(x,t)$ är inversa Laplacetransformen av detta uttryck, och för att finna den observerar vi först att den första termen $1/z$ är transformen av funktionen 1. I den andra termen ser vi att parentesen är $\mathcal{L}(-1+1/(1+t))$, och effekten av faktorn $e^{-zx/c}$ är en translation. Därför blir

$$u(x,t) = 1 + \left(-1 + \frac{1}{1+t-\frac{x}{c}}\right)\chi_{\{t-x/c>0\}},$$

dvs. $u(x,t) = 1$ för $t < x/c$ och

$$u(x,t) = \frac{1}{1+t-\frac{x}{c}}$$

för $t > x/c$. Observera att dessa båda uttryck stämmer överens i skarven, båda är 1 för $t = x/c$. (Rita gärna en graf.)

Här kunde man ha kortat räkningarna något genom att i stället för u söka funktionen $v(x,t) = u(x,t) - 1$, en form av steady state-metoden.

En alternativ, annorlunda metod är att utnyttja att den allmännna lösningen till vågekvationen i en rumsdimension är $u(x,t) = \phi(t-x/c)+\psi(t+x/c)$, där ϕ och ψ är funktioner av en variabel. Det gäller då att bestämma ϕ och ψ så att rand- och initialvärdena blir de rätta. Detta betyder

$$
\begin{aligned}
\phi(-x/c) + \psi(+x/c) &= 1, \quad x > 0 \\
\phi'(-x/c) + \psi'(+x/c) &= 0, \quad x > 0 \\
\phi(t) + \psi(t) &= \frac{1}{1+t}, \quad t > 0.
\end{aligned}
$$

Om man här deriverar den första ekvationen och sedan kombinerar den med den andra, får man att $\psi' = 0$ på positiva halvaxeln. Då är $\psi(t)$ konstant, säg a, för $t > 0$. Den tredje ekvationen ger därför $\phi(t) = -a + 1/(1+t)$ för $t > 0$, och den första att $\phi(t) = -a + 1$ för $t < 0$. För $x, t > 0$ kan vi nu stoppa in dessa uttryck för ϕ och ψ i ekvationen $u(x,t) = \phi(t-x/c)+\psi(t+x/c)$. Då försvinner a, och resultatet blir detsamma som vi nyss fann med Laplacetransformen.

Anm. I skarven $t = x/c$ uppfyller lösningen inte vågekvationen i vanlig mening, eftersom den där inte ens är deriverbar. Men i distributionsmening är vågekvationen uppfylld även där.

Uppgift 3.
Eftersom $1 + x$ och $1 - x$ tillsammans bildar en bas i det tvådimensionella vektorrummet av alla förstagradspolynom, är uppgiften ekvivalent med att minimera $\int_0^1 |e^x - P(x)|^2\,dx$ över alla förstagradspolynom $P(x)$. För att använda satsen om bästa approximation behöver vi en ortogonalbas i detta vektorrum. Den ena basvektorn kan vi välja som det konstanta polynomet 1. Man kan använda Gram-Schmidts metod för att finna den andra basvektorn, alltså en vektor som är ortogonal mot 1. Men det är nog enklare att observera,

med hjälp av en graf, att polynomet $x - 1/2$ av symmetriskäl är ortogonalt mot 1. Som ortogonalbas väljer vi alltså 1 och $x - 1/2$, med normer i $L^2(0,1)$ givna av $\|1\| = 1$ och $\|x - 1/2\|^2 = 1/12$. Den bästa approximationen vi söker är då $P(x) = c + d(x - 1/2)$, där

$$c = \int_0^1 e^x \cdot 1\,dx = e - 1$$

och

$$\begin{aligned} d &= 12\int_0^1 e^x(x - \frac{1}{2})\,dx \\ &= 12\left([xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 e^x\,dx\right) \\ &= 18 - 6e. \end{aligned}$$

Alltså ges P av

$$P(x) = e - 1 + (18 - 6e)(x - 1/2) = (18 - 6e)x - 10 + 4e.$$

Slutligen måste detta skrivas om som $P(x) = -a(1 + x) - b(1 - x)$; observera teckenbytet. Identifiering av koefficienter ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} -a - b &= -10 + 4e \\ -a + b &= 18 - 6e. \end{aligned}$$

Man får härav $a = -4 + e$ och $b = 14 - 5e$, som är svaret på uppgiften.

En alternativ metod är att med $x' = 2x - 1$ transformera problemet till $[-1, 1]$. I det intervallet kan man använda Legendrepolynomen. Men detta blir knappast enklare.

Uppgift 4.
På grund av termen $\sin \pi x$ är ekvationen en inhomogen variant av värmeledningsekvationen. Denna term innehåller inte variabeln t, och randvillkoren (för $x = 0$ och $x = 1$) är

också oberoende av t. Därför är det upplagt för steady state-metoden. Vi skall alltså först hitta en lösning $u_0(x)$ till ekvationen som bara beror av x och dessutom antar rätt randvärden. Det betyder $0 = u_0''(x) + \sin \pi x$, samt $u_0(0) = 1$ och $u_0(1) = -1$. Man får $u_0(x) = \pi^{-2} \sin \pi x + ax + b$, där $b = 1$, $a+b = -1$, så att $a = -2$. Med $u_0(x) = \pi^{-2} \sin \pi x - 2x + 1$ sätter vi $v(x,t) = u(x,t) - u_0(x)$ och får

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & 0 < x < 1, \ \ t > 0, \\ v(0,t) = 0, \ \ v(1,t) = 0, & t > 0, \\ v(x,0) = -\pi^{-2} \sin \pi x + 2x - 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Detta är ett standardproblem för Fouriers metod. De separerade lösningarna med rätta randvärden blir $e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$ med $n = 1, 2, \ldots$. För v ansätter man

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x.$$

Begynnelsevillkoret $v(x,0) = -\pi^{-2} \sin \pi x + 2x - 1$ ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x = -\pi^{-2} \sin \pi x + 2x - 1.$$

Högerledets sinustermen finns med i vänsterledet, så vi utvecklar x och 1 i sinusserie i intervallet. BETA 13.1 (12) och (25) med $L = 1$ medför

$$x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n\pi x}{n} \quad \text{och} \quad 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{2n+1}.$$

Genom att identifiera koefficienterna får vi $b_1 = -\pi^{-2} + 4/\pi - 4/\pi = -\pi^{-2}$ och $b_{2n} = -2/(n\pi)$ samt

$$b_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)} - \frac{4}{\pi(2n+1)} = 0$$

för $n = 1, 2, \ldots$. Därmed känner vi v, och för den sökta funktionen $u = v + u_0$ får vi

$$u(x,t)$$
$$= -2x+1+\frac{1}{\pi^2}(1-e^{-\pi^2 t})\sin \pi x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-4n^2\pi^2 t}\sin 2n\pi x}{n}.$$

Anm. Här finns en genväg. I stället för att utveckla x och 1 separat kan man få utvecklingen av $2x-1$ direkt, antingen genom att sätta $t = 2\pi x$ i BETA 13.1 (18) eller genom att välja $L = 1/2$ och $h = 1$ i BETA 13.1 (5).

Uppgift 5.
Insignalen $\operatorname{sgn} t\, e^{-|t|}$ har enligt BETA 13.2 F33 Fouriertransformen $-\frac{2i\xi}{1+\xi^2}$. Enligt samma tabell, F35, har utsignalen $|t|e^{-|t|}$ Fouriertransformen $\frac{2(1-\xi^2)}{(1+\xi^2)^2}$. Systemfunktionen är därför kvoten $\hat{h}(\xi) = \frac{i(1-\xi^2)}{\xi(1+\xi^2)}$. Detta betyder speciellt att insignalen e^{int} ger utsignalen $\hat{h}(n)e^{int}$. (Det ser man antingen med hjälp av en faltning med impulssvaret h eller genom att observera att Fouriertransformen av e^{int} är $2\pi\delta(\xi - n)$, alltså en multipel av Diracfunktionen translaterad till punkten n.)

Nu utvecklar vi den givna, periodiska insignalen $f(t) = \pi - t$ i Fourierserie. Denna periodiska funktion är udda, som man ser antingen i en graf eller genom att observera att för $t \in (-2\pi, 0)$ är

$$f(t) = f(t+2\pi) = \pi - (t+2\pi) = -(\pi - (-t)) = -f(-t).$$

Dess Fourierserie ges därför av formel (5) i BETA 13.1 där vi sätter $L = h = \pi$:

$$f(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n} = -i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{int}}{n} + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-int}}{n}.$$

Här känner vi utsignalen för varje term, och den sökta utsignalen blir summan

$$
\begin{aligned}
&-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i(1-n^2)}{n(1+n^2)}\frac{e^{int}}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i(1-n^2)}{(-n)(1+n^2)}\frac{e^{-int}}{n} \\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-n^2)}{n^2(1+n^2)}(e^{int}+e^{-int})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-n^2)}{n^2(1+n^2)}\cos nt.
\end{aligned}
$$

Det sista uttrycket är svaret.

Anm. Man kan se att impulssvaret $h(t)$ är reellt, eftersom $\hat{h}$ är en udda och rent imaginär funktion. Då vet man att insignalen $\sin nt$ ger utsignalen $\Im(\hat{h}(n)e^{int}) = \frac{\hat{h}(n)}{i}\cos nt$. Detta gör uppdelningen av sinusserien ovan onödig.

Uppgift 6.
Vi använder polära koordinater r, θ och skriver $u = u(r, \theta, t)$, där $0 < r < r_0$ och $0 < \theta < \pi$. Värmeledningsekvationen blir

$$u_t = k(u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta}).$$

Randvillkoren skrivs nu $u(r, 0, t) = 0$ och $u(r, \pi, t) = 0$ och $u'_r(r_0, \theta, t) = 0$. Initalvillkoret betyder $u(r, \theta, 0) = r\cos\theta$.

Enligt känt mönster söker vi separerade lösningar $u = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ och får

$$\frac{T'}{kT} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta}.$$

Här är båda leden en konstant $-\mu^2$, så att $T' = -\mu^2 kT$ och därmed $T = \text{konst} \cdot e^{-\mu^2 kt}$. Av fysikaliska skäl ser vi att $\mu^2 \geq 0$, för annars skulle temperaturen växa orimligt. Vi kan alltså välja $\mu \geq 0$. Ur ekvationen ovan får vi också

$$\frac{r^2R''}{R} + \frac{rR'}{R} + \mu^2r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta},$$

och här är båda leden en konstant ν^2. Vi får $\Theta'' = -\nu^2\Theta$. Eftersom randvillkoren medför $\Theta(0) = \Theta(\pi) = 0$, måste ν^2

vara kvadraten på ett positivt heltal, så att $\nu \in \{1, 2, \dots\}$, och $\Theta(\theta) = \text{konst} \cdot \sin \nu\theta$. För $R(r)$ får vi Bessels ekvation

$$r^2 R'' + rR' + (\mu^2 r^2 - \nu^2)R = 0,$$

vars lösningar är linjärkombinationer av $J_\nu(\mu r)$ och $Y_\nu(\mu r)$. Randvillkoren ger att $R'(r_0) = 0$ och att $R(r)$ i varje fall måste vara begränsad då $r \to 0$. Det senare utesluter Y_ν, och det första betyder att μr_0 måste vara ett nollställe till J_ν'. Om därför $\lambda_{j\nu},\ j = 1, 2, \dots$ betecknar de positiva nollställena till J_ν', har vi $\mu = \lambda_{j\nu}/r_0$ för något j.

De separerade lösningarna blir alltså

$$J_\nu \left(\frac{\lambda_{j\nu} r}{r_0} \right) \sin \nu\theta \, e^{-\lambda_{j\nu}^2 kt/r_0^2}.$$

Den sökta lösningen är en summa

$$u(r, \theta, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{j\nu} J_\nu \left(\frac{\lambda_{j\nu} r}{r_0} \right) \sin \nu\theta \, e^{-\lambda_{j\nu}^2 kt/r_0^2},$$

där koefficienterna $b_{j\nu}$ skall bestämmas så att initialvillkoret blir uppfyllt. Det innebär att

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{j\nu} J_\nu \left(\frac{\lambda_{j\nu} r}{r_0} \right) \sin \nu\theta = r \cos\theta \tag{2}$$

för $0 < r < r_0$ och $0 < \theta < \pi$. Här börjar vi med θ-variabeln och utvecklar $\cos\theta$ i sinusserie i intervallet. Enligt BETA 13.1 (11) med $L = \pi,\ h = 1$ är

$$\cos\theta = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin 2n\theta.$$

Nu kan (2) ses som en likhet mellan två sinusserier, och genom att identifiera koefficienterna får vi att $b_{j,\nu} = 0$ för alla udda ν och

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_{j,2n} \, J_{2n} \left(\frac{\lambda_{j,2n} r}{r_0} \right) = \frac{8n}{\pi(4n^2 - 1)} r.$$

Vi skall alltså utveckla högerledet här i Besselfunktionsserie. Det är möjligt, eftersom Besselfunktionerna $J_{2n}\left(\lambda_{j,2n} r/r_0\right)$, där $j = 1, 2, \ldots$, bildar ett fullständigt ortogonalsystem med vikten $w(r) = r$ i intervallet $(0, r_0)$. Koefficienterna är enligt BETA 12.4, (ii) på sidan 276, där vi tar $c = 0$,

$$b_{j,2n} =$$
$$\frac{8n}{\pi(4n^2 - 1)} \frac{2\lambda_{j,2n}^2}{r_0^2(\lambda_{j,2n}^2 - 4n^2) J_{2n}(\lambda_{j,2n})^2} \int_0^{r_0} J_{2n}\left(\frac{\lambda_{j,2n} r}{r_0}\right) r^2 \, dr.$$

Svaret på uppgiften är därför

$$u(r, \theta, t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{j,2n} J_{2n}\left(\frac{\lambda_{j,2n} r}{r_0}\right) \sin 2n\theta \; e^{-\lambda_{j,2n}^2 kt/r_0^2},$$

där $b_{j,2n}$ och $\lambda_{j,2n}$ är som ovan.