MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Datum: 2011-03-19
Telefon: Richard Lärkäng
0703 - 088304
Skrivtid: 8.30 – 13.30

Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA samt "Några tips om Fourierserier m.m. i BETA" (två sidor).

(maxpoäng inom parentes, med summa 60)

1. Funktionen f har Fouriertransformen $\hat{f}(\xi) = 1/\sqrt{|\xi|}$ för $|\xi| < 1$ och $= 0$ för övriga ξ. Bestäm $f''(0)$ och
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\,e^{ibx}\,dx,$$
där b är ett reellt tal. (3+5)

2. Lös problemet
$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \ell - x, & 0 < x < \ell. \end{cases}$$
Här är ℓ och k positiva konstanter. (8)

3. Låt N vara ett udda naturligt tal. Bestäm med detta N den diskreta Fouriertransformen av följden $a_n = (-1)^n$, $n = 0, ..., N-1$. Beräkna därefter
$$\sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi m}{N}}.$$
Det är valfritt att använda kursens och kursbokens definition av den diskreta Fouriertransformen eller den något avvikande definitionen i BETA. (3+5)

4. Lös problemet

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + (1-x)t, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

där $c > 0$ är en konstant. (8)

5. Betrakta i intervallet $[0,2]$ Sturm-Liouville-problemet

$$f'' + \lambda f = 0, \qquad f(0) = 0, \quad 2f'(2) = f(2).$$

Hur många egenvärden med $\lambda < 9$ har detta problem? (8)

6. Lös Dirichlets problem $\Delta u = 0$ i cylindern $x^2+y^2 < R_0^2$, $0 < z < 1$, med randvärdena $u(x,y,0) = u(x,y,1) = 0$ och $u(x,y,z) = \sin\frac{\pi z}{2}$ då $x^2+y^2 = R_0^2$. (8)

7. Formulera konvergenssatsen för Fourierserien av en styckvis glatt funktion, och bevisa den i kontinuitetspunkter. (6)

8. Betrakta ett inhomogent randvärdesproblem $Lu(x,y) = F(x)$ i en axelparallell rektangel, med givna randvillkor som ger värdena av u eller dess normalderivata på varje rektangelsida. Här är L en lämplig linjär andra ordningens partiell differentialoperator, och F beror alltså bara av x. Beskriv hur man behandlar detta problem för att sedan kunna använda metoden med variabelseparation. Frågan avser bara *förberedelserna* för variabelseparation. (6)