MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Datum: 2011-03-19

LÖSNINGAR TILL tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Uppgift 1.
Fouriertransformen av f'' är $-\xi^2 \hat{f}(\xi) = -|\xi|^{3/2}\,\chi_{\{|\xi|<1\}}$. Detta är en integrabel funktion, och Fouriers inversionsformel för $x = 0$ ger

$$f''(0) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} |\xi|^{3/2}\, d\xi = -\frac{2}{5\pi}.$$

Enligt tabell är

$$\mathcal{F}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x} = \pi\chi_{(-1/2,\,1/2)}$$

och därmed

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\, e^{ibx}\right) = \pi\chi_{(b-1/2,\,b+1/2)}.$$

Man kan nu använda Plancherels formel på den givna integralen. Vi kastar om ordningen mellan faktorerna för att slippa effekten av komplexkonjugeringen i formeln. Då får man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\, e^{ibx} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\,\pi \int \chi_{\{b-\frac{1}{2}<\xi<b+\frac{1}{2}\}} \frac{1}{\sqrt{|\xi|}}\chi_{\{|\xi|<1\}}\, d\xi.$$

Denna kvantitet är en jämn funktion av b. Det ser man antingen genom att granska högerledet, eller genom att observera att högerledet och därmed vänsterledet är reellvärda, så att ingenting ändras om man ersätter e^{ibx} i vänsterledet med $\cos bx$.

Om $b > 3/2$ blir integralen uppenbarligen 0. För $1/2 < b \le 3/2$ får man

$$\frac{1}{2}\int_{b-1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{|\xi|}}\, d\xi = 1 - \sqrt{b - 1/2}.$$

För $0 \le b \le 1/2$ blir uttrycket

$$\frac{1}{2}\int_{b-1/2}^{b+1/2} \frac{1}{\sqrt{|\xi|}}\,d\xi = \frac{1}{2}\int_{b-1/2}^{0} \frac{1}{\sqrt{|\xi|}}\,d\xi + \frac{1}{2}\int_{0}^{b+1/2} \frac{1}{\sqrt{|\xi|}}\,d\xi$$
$$= \sqrt{1/2-b} + \sqrt{1/2+b}.$$

För att få uttryckets värde även för $b < 0$ ersätter vi b med $|b|$ och får sammanfattningsvis att integralens värde är

$$\begin{cases} \sqrt{1/2-|b|} + \sqrt{1/2+|b|} & \text{om} \quad |b| \le 1/2 \\ 1 - \sqrt{|b|-1/2} & \text{om} \quad 1/2 < |b| \le 3/2 \\ 0 & \text{om} \quad |b| > 3/2. \end{cases}$$

Anm. I stället för att använda Plancherels formel kan man se den givna integralen som Fouriertransformen i punkten $-b$ av en produkt, alltså en faltning av två Fouriertransformer. Faltningen leder till samma integral i ξ som ovan.

Uppgift 2.
Randvillkoren för $x = 0$ och $x = \ell$ är homogena, så man kan variabelseparera och ansätta $u(x,t) = X(x)T(t)$. Ekvationen blir

$$\frac{1}{k}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X},$$

och denna kvantitet måste vara konstant, säg λ.

För X betyder detta att $X'' = \lambda X$, och randvillkoren ger $X'(0) = 0$ och $X(\ell) = 0$. Då ser vi, som vanligt via funktioner $\cosh \mu x$ och $\sinh \mu x$, att det inte finns några lösningar med $\lambda > 0$ som uppfyller randvillkoren. Detsamma gäller för $\lambda = 0$. För $\lambda < 0$ skriver vi $\lambda = -\nu^2$ där $\nu > 0$ och finner lösningar $X(x) = \cos \nu x$ med $\nu = (n-1/2)\pi/\ell,\ \ n = 1, 2 \ldots.$ Observera att vi därmed har hittat alla egenfunktioner till ett reguljärt Sturm-Liouville-problem. Dessa cosinusfunktioner bildar därför ett fullständigt ortogonalsystem i $L^2(0,\ell)$.

För T får vi ekvationen $T' = -k[(2n-1)\pi/(2\ell)]^2 T$, med lösningar proportionlla mot $\exp\left(-(2n-1)^2 \frac{k\pi^2}{4\ell^2} t\right)$. Nu kan vi ansätta

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(2n-1)^2 \frac{k\pi^2}{4\ell^2} t} \cos(2n-1)\frac{\pi}{2\ell}x.$$

Initialvärdet säger att vi skall ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)\frac{\pi}{2\ell}x = \ell - x$$

för $0 < x < \ell$. Detta innebär en utveckling av högerledet i det nyss nämnda ortogonalsystemet, som vi hittar på vanligt sätt. Först ser vi genom att räkna ut en integral att

$$\| \cos\left(2n-1\right) \frac{\pi}{2\ell} x \|^2 = \frac{\ell}{2},$$

där normen tas i $L^2(0,\ell)$. Därför blir koefficienterna

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} (\ell - x) \cos\left(2n-1\right) \frac{\pi}{2\ell} x \, dx = \frac{8\ell}{\left(2n-1\right)^2 \pi^2},$$

det sista via en partialintegration. Lösningen är alltså

$$u(x,t) = \frac{8\ell}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)^2 \frac{k\pi^2}{4\ell^2} t} \cos(2n-1)\frac{\pi}{2\ell}x.$$

Anm.1. I stället för att räkna ut koefficienterna a_n kan man få dem ur BETA 13.1 (6), med $L = h = 2\ell$.

Anm 2. Det går också att lösa detta problem genom Laplacetransformation i t-variabeln, men det leder till en rätt besvärlig invers Laplacetransform.

Uppgift 3.

Med kursbokens definition av den diskreta Fouriertransformen får man

$$\hat{a}_m = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n e^{-2\pi i \frac{nm}{N}}$$

för $m \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Detta är en ändlig geometrisk serie, med kvot $-e^{-2\pi i m/N}$. Eftersom N är udda, är $-e^{-2\pi i m/N} \neq$

1 för alla dessa m, så den vanliga formeln för ändliga geometriska serier kan användas. Man får

$$\hat{a}_m = \frac{1-(-1)^N e^{-2\pi i m}}{1+e^{-2\pi i m/N}} = \frac{2}{1+e^{-2\pi i m/N}} = \frac{e^{\pi i m/N}}{\cos\frac{\pi m}{N}}.$$

Parsevals formel $\sum |\hat{a}_m|^2 = N\sum |a_n|^2$ medför nu

$$\sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\cos^2\frac{\pi m}{N}} = N\sum_{n=0}^{N-1} 1 = N^2.$$

Anm. Som kontroll kan man lätt verifiera denna formel för $N=3$. Då blir summan

$$1 + \frac{1}{(1/2)^2} + \frac{1}{(-1/2)^2} = 9.$$

Uppgift 4.
Detta är en inhomogen variant av vågekvationen, men både rand- och initialvillkoren är homogena. Steady state-metoden kan inte användas eftersom den inhomogena termen $(1-x)t$ beror av t. Därför skall vi ansätta en Fourierserie i x-variabeln med okända t-beroende koefficienter (teknik 2). Om vi hade den homogena vågekvationen med dessa randvillkor, skulle de separabla lösningarna ha x-beroende faktorer $\sin n\pi x$, $n = 1, 2, \ldots$, som ju har rätt randvärden. Vi ansätter alltså

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin n\pi x. \tag{1}$$

Insatt i den partiella differentialekvationen ger detta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n''(t)\sin n\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} c^2 n^2\pi^2 a_n(t)\sin n\pi x = (1-x)t.$$

För att utveckla högerledet i sinusserie i x-variabeln använder vi BETA 13.1 (5) med $L = h = 1$ och får

$$(1-x)t = \frac{2}{\pi}t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi x.$$

Identifiering av koefficienter ger då att för varje n

$$a_n''(t) + c^2n^2\pi^2 a_n(t) = \frac{2}{\pi n}t.$$

De givna initialvillkoren betyder att summan i (1) ska bli 0 för $t = 0$, även efter en derivation i t. Det medför $a_n(0) = a_n'(0) = 0$. Vi har en inhomogen ordinär differentialekvation. Motsvarande homogena ekvation har den allmänna lösningen $A_n \cos cn\pi t + B_n \sin cn\pi t$. Som partikulärlösning kan man ansätta ett förstagradspolynom, eller bara konst$\cdot t$, och få $\frac{2}{\pi^3c^2n^3}t$. Genom att addera homogen- och partikulärlösningarna och välja A_n och B_n så att startvärdena blir rätt finner man

$$a_n(t) = \frac{2}{\pi^3c^2n^3}\left(t - \frac{1}{cn\pi}\sin cn\pi t\right).$$

Problemets lösning är alltså

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi^3c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(t - \frac{1}{cn\pi}\sin cn\pi t\right)\sin n\pi x.$$

Anm. 1. En annan, listig metod är att i stället för en steady state-lösning bestämma en lösning till differentialekvationen av formen $u_0(x,t) = f(x)t$ som också uppfyller randvillkoren. Man finner att $f(x)$ blir ett tredjegradspolynom. Sedan söker man v, där $u = v + u_0$. Då kommer v att uppfylla den homogena vågekvationen, ha randvärden 0 och initialvärden $v(x,0) = 0$ och $v_t(x,0) = -f(x)$. Därför kan v bestämmas med variabelseparation.

Anm. 2. Det går också att lösa problemet genom Laplacetransformation i t-variabeln. Om alltså $U(x,s) = \mathcal{L}u$ blir den transformerade ekvationen

$$s^2U(x,s) = c^2U_{xx}(x,s) + \frac{1-x}{s^2},$$

där vi utnyttjade att $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ och Laplacetransformerade termen $(1-x)t$. För fixt s är detta en ordinär differentialekvation i x-variabeln. En partikulärlösning ges av $U(x,s) = (1-x)/s^4$, och lösningarna till motsvarande homogena ekvation är linjärkombinationer av $e^{sx/c}$ och $e^{-sx/c}$.

Vi söker därför en lösning av formen

$$U(x,s)=\frac{1-x}{s^4}+Ae^{sx/c}+Be^{-sx/c},$$

där A och B får bero av s men inte av x. Dessutom skall U uppfylla randvillkoren vid $x=0$ och $x=1$, alltså $U(0,s)=U(1,s)=0$. Man finner att

$$A=\frac{1}{s^4}\frac{e^{-2s/c}}{1-e^{-2s/c}},\qquad B=-\frac{1}{s^4}\frac{1}{1-e^{-2s/c}},$$

så att

$$U(x,s)=\frac{1-x}{s^4}+\frac{1}{s^4}\frac{e^{-s(2-x)/c}}{1-e^{-2s/c}}-\frac{1}{s^4}\frac{e^{-sx/c}}{1-e^{-2s/c}}.$$

För att finna den inversa Laplacetransformen av detta utvecklar vi $1/(1-e^{-2s/c})$ i geometrisk serie och får

$$U(x,s)=\frac{1-x}{s^4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{s^4}\,e^{-s(2n+2-x)/c}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{s^4}\,e^{-s(2n+x)/c}.$$

(Samma teknik används på sidan 282 i Folland.) Enligt tabell är $1/s^4$ Laplacetransformen av $t^3/6$. För $a>0$ är därmed e^{-as}/s^4 Laplacetransformen av $(t-a)_+^3/6$, där vi med $(t-a)_+^3$ menar $(t-a)^3$ för $t>a$ och 0 för $t<a$. Därför får man

$$u(x,t)=$$
$$\frac{1}{6}\left[(1-x)t^3+\sum_{n=0}^{\infty}\left(t-\frac{2n+2-x}{c}\right)_+^3-\sum_{n=0}^{\infty}\left(t-\frac{2n+x}{c}\right)_+^3\right].$$

Detta är en annan framställning av samma lösning som vi fann ovan.

Uppgift 5.

Om $\lambda<0$, sätter vi $\lambda=-\mu^2$ med $\mu>0$. Den allmänna lösningen till ekvationen $f''+\lambda f=0$ är då $f(x)=a\cosh\mu x+b\sinh\mu x$. Randvillkoret i 0 leder till $a=0$ och $f(x)=\sinh\mu x$. Nu ger randvillkoret i punkten 2 att

$$2\mu\cosh 2\mu=\sinh 2\mu$$

eller ekvivalent

$$\tanh 2\mu = 2\mu.$$

Denna ekvation har ingen lösning med $\mu > 0$, av följande skäl. De två kurvorna tangerar varandra i origo, och eftersom derivatan av $\tanh 2\mu$ är $2/\cosh^2 2\mu < 2$ för $\mu > 0$ har de ingen skärningspunkt där $\mu > 0$ (rita en graf).

Om $\lambda = 0$ blir lösningarna till ekvationen $f'' + \lambda f = 0$ förstagradspolynom, och randvillkoret i 0 leder till $f(x) = x$. Man konstaterar att funktionen $f(x) = x$ uppfyller randvillkoret i punkten 2. Den är alltså en egenfunktion, och 0 är ett egenvärde, som är mindre än 9.

Om $\lambda > 0$, skriv $\lambda = \nu^2$ med $\nu > 0$. Den allmänna lösningen ges nu av $f(x) = a \cos \nu x + b \sin \nu x$. Randvillkoret i 0 ger $a = 0$ så att bara $f(x) = \sin \nu x$ återstår. Randvillkoret i 2 medför analogt med ovanstående

$$\tan 2\nu = 2\nu.$$

Vi vill nu bestämma antalet egenvärden med $0 < \lambda < 9$, eller ekvivalent antalet lösningar till denna ekvation med $0 < \nu < 3$. För att (av bekvämlighetsskäl) få den vanliga tangenskurvan, sätter vi $2\nu = \nu'$ och söker i stället lösningar till ekvationen

$$\tan \nu' = \nu'$$

med $0 < \nu' < 6$. Återigen ser vi att de två kurvorna tangerar varandra i origo och att linjen nu ligger under den gren av tangenskurvan som ges av $0 < \nu' < \pi/2$. Men den skär alla övriga grenar i $\nu' > 0$. (Rita en graf.) Nästa gren av tangenskurvan har sin positiva del i intervallet $\pi < \nu' < 3\pi/2$ så den ger en skärningspunkt med $\nu' < 6$. Men den därpå följande grenen blir positiv först då $\nu' > 2\pi > 6$. Därmed har vi bara en skärningspunkt i $0 < \nu' < 6$.

Sammanfattningsvis finner vi att det finns två egenvärden med $\lambda < 9$.

Uppgift 6.
Vi använder cylindriska koordinater r, θ, z. Eftersom randvärdena är oberoende av θ, gäller detsamma om lösningen, som vi skriver $u(r,z)$. Randvillkoren är då $u(r,0) = u(r,1) = 0$ och $u(R_0, z) = \sin \pi z/2$.

Ekvationen blir

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + u_{zz} = 0.$$

Vi separerar variabler genom $u = R(r)Z(z)$ och får

$$\frac{R'' + r^{-1}R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = \lambda$$

för någon konstant λ. Randvillkoren medför $Z(0) = Z(1) = 0$. Då vet man att de enda möjligheterna för Z är att $\lambda = (n\pi)^2$ och $Z(z) = \sin n\pi z$, där n är ett naturligt tal. För R får vi därför ekvationen

$$r^2 R'' + rR' - (n\pi)^2 r^2 R = 0.$$

Detta är μ-versionen av den modifierade Besselekvationen, med ν-värde 0 och $\mu = n\pi$. Lösningarna är linjärkombinationer av $I_0(n\pi r)$ och $K_0(n\pi r)$. Eftersom R skall vara begränsad vid $r = 0$, förkastas K_0.

De separerade lösningarna är därför $I_0(n\pi r) \sin n\pi z$, där $n = 1, 2, \ldots$. Då ansätter vi

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_0(n\pi r) \sin n\pi z.$$

Randvillkoret för $r = R_0$ blir nu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n I_0(n\pi R_0) \sin n\pi z = \sin \frac{\pi z}{2}.$$

Vi måste alltså utveckla funktionen i högerledet i sinusserie. Det enklaste är att använda BETA 13.1 (16) med $\alpha = 1/2$, som säger att

$$\sin \frac{t}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 - 1/4} \sin nt, \quad 0 < t < \pi.$$

Med $t = \pi z$ får vi då

$$\sin\frac{\pi z}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2 - 1/4}\sin n\pi z, \quad 0 < z < 1.$$

Detta ger

$$a_n = \frac{8}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)I_0(n\pi R_0)}.$$

Lösningen till problemet är därför

$$u(r,z) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)I_0(n\pi R_0)}I_0(n\pi r)\sin n\pi z.$$

Kommentar till teoriuppgift 8.
Låt rektangeln vara given av $a < x < b, \ \ c < y < d$. Man kan finna en steady state-lösning $u_0(x)$ som uppfyller $Lu_0(x) = F(x)$. Men det går i allmänhet inte att också få u_0 att uppfylla randvillkoren på rektangelsidorna $x = a$ och $x = b$, eftersom dessa villkor beror av y och alltså varierar längs rektangelsidorna. Om man nu skriver $u(x,y) = v(x,y) + u_0(x)$, skall v uppfylla den homogena ekvationen $Lv = 0$ i rektangeln, och v skall satisfiera (inhomogena) randvillkor på de fyra rektangelsidorna. Med superposition kan man sedan dela upp v i två funktioner som uppfyller homogena randvillkor för $x = a$ och $x = b$ resp. för $y = c$ och $y = d$. Dessa två funktioner kan bestämmas med variabelseparation.

En variant av detta består i att börja med superposition och skriva u som en summa $u = v + w$, där $Lv = F$ och v skall uppfylla homogena randvillkor för $x = a$ och $x = b$, och samma randvillkor som u för $y = c$ och $y = d$. För funktionen w får man då $Lw = 0$ samt homogena randvillkor för $y = c$ och $y = d$. För att finna v kan man finna en steady state-lösning $v_0(x)$ som uppfyller $Lv_0 = F$ och de homogena randvillkoren för $x = a$ och $x = b$. Sedan bestämmer man $v - v_0$ med variabelseparation. Även w fås med variabelseparation.