

**Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2
och Fouriermetoder MVE290 för TM2**

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA samt “Några tips om Fourierserier m.m. i BETA” (två sidor).

(maxpoäng inom parentes, med summa 60)

1. Bestäm Fourierserien för den 2π -periodiska funktion f som ges av $f(x) = \cosh x$, $|x| \leq \pi$. Beräkna också

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

(4+4)

2. Lös problemet

$$\begin{cases} (1+t^2)u_t = ku_{xx}, & 0 < x < \ell, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(\ell,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = x, & 0 < x < \ell. \end{cases}$$

Här är ℓ och k positiva konstanter. (8)

3. Ett dynamiskt system kännetecknas av att insignalen f ger en utsignal vars Fouriertransform är $\hat{f}(\omega)/(1+\omega^2)$. Vilken insignal ger då utsignalen $x^{-1} \sin 2x$? Vad är systemets impulssvar? (4+3)

4. Bestäm en lösning till värmeledningsekvationen $u_t = u_{xx}$ i första kvadranten $x, t > 0$, med randvillkoren

$$u(x,0) = \cos x, \quad x > 0 \quad \text{och} \quad u_x(0,t) = 1/\sqrt{t}, \quad t > 0. \quad (8)$$

5. Bestäm den bästa approximationen, mätt med normen i $L^2[0, \pi]$, av funktionen $f(x) = \cos x$ i det linjära rum som spänns upp av funktionerna $\sin x$, $\sin 2x$ och $\sin 3x$. (7)

6. Lös följande Dirichletproblem i den cylinder som ges av $x^2 + y^2 < R_0^2$, $0 < z < h$:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y, z) = 0 \\ u(x, y, 0) = 1 \text{ för } x > 0 \text{ och } = 0 \text{ för } x < 0 \\ u(x, y, h) = 0 \\ u(x, y, z) = 0 \text{ för } x^2 + y^2 = R_0^2. \end{cases} \quad (10)$$

7. Härled formeln för den genererande funktionen för Bessel-funktioner. (6)

8. Givet ett ortogonalsystem i rummet $L^2[a, b]$, ange tre ekvivalenta villkor för att detta system är fullständigt. Ge också exempel på ett fullständigt och ett ofullständigt system, för något val av a och b . (4+2)