MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers
Datum: 2011-08-25

LÖSNINGAR TILL
tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Uppgift 1.
Eftersom funktionen f är jämn, kan den utvecklas i cosinusserie, $f(x) = a_0/2 + \sum_1^\infty a_n \cos nx$, där

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cosh x \cos nx\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Denna integral kan beräknas på flera sätt. Det enklaste är kanske att se faktorn $\cos nx$ som realdelen av e^{inx} och integrera de två termerna $e^{\pm x+inx}$ för att sen ta realdelen av den erhållna integralen. Detta är lite elegantare än att uttrycka integranden i termer av exp av $\pm x$ och $\pm inx$ och integrera fyra termer. Man kan också partialintegrera två gånger, vilket ger att integralen är summan av utintegrerade termer och en multipel av samma integral. Här ska vi i stället använda formeln 332 i BETA 7.4, sidan 175, som ger en primitiv funktion till $\exp ax \cos bx$. Genom att välja $a = \pm 1$ och $b = n$ får man

$$a_n =$$
$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x}{1+n^2}(\cos nx + n \sin nx) + \frac{e^{-x}}{1+n^2}(-\cos nx + n\sin nx)\right]_0^\pi.$$

Här ger sinustermerna inget bidrag, och cosinustermerna tar ut varandra i 0. Man får

$$a_n = \frac{2\sinh \pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{1+n^2}.$$

Fourierutvecklingen av f är alltså

$$f(x) = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2\sinh\pi}{\pi}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx.$$

Anm 1. Ett smart, alternativt sätt att hitta denna Fourierserie är att observera att $\cosh x = \cos ix$ och att Fourierserien för funktionen $\cos \alpha x$ i BETA 13.1 (15) gäller även för $\alpha = i$.

För att finna den sökta summan vill vi välja $x = \pi$ i denna serieutveckling. Frågan är då om serien konvergerar i denna punkt. Men f är kontinuerlig i punkten $x = \pi$, eftersom den är jämn och 2π-periodisk. Därmed är den kontinuerlig på hela linjen. Eftersom f också är styckvis glatt, ger konvergenssatsen att Fourierserien konvergerar mot $f(x)$ i varje punkt x. Vi kan alltså sätta $x = \pi$ och får

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi \coth \pi}{2} - \frac{1}{2}.$$

Anm. 2 Man kan välja att bestämma den komplexa formen av Fourierserien i stället för cosinusserien. Räkningarna blir ganska likartade. Men för att sedan beräkna den sökta summan måste man då slå ihop termerna med n och $-n$ eller ta realdelen, vilket väsentligen betyder att gå över till cosinusserien.

Uppgift 2.

Randvillkoren för $x = 0$ och $x = \ell$ är homogena, så man kan variabelseparera och ansätta $u(x,t) = X(x)T(t)$. Ekvationen blir

$$\frac{1}{k}(1+t^2)\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X},$$

och denna kvantitet måste vara konstant, säg μ. Det betyder att $X'' = \mu X$, och randvillkoren ger $X(0) = 0$ och $X'(\ell) = 0$. Då ser vi (som vanligt) att det inte finns några lösningar med $\mu > 0$ eller $\mu = 0$, förutom nollösningen. För $\mu < 0$ skriver vi $\mu = -\nu^2$ där $\nu > 0$ och finner lösningar $X(x) = \sin \nu x$ med $\nu = (n - 1/2)\pi/\ell,\ n = 1, 2, \dots$. För T får vi ekvationen

$$\frac{T'}{T} = -\frac{k\nu^2}{1+t^2},$$

en ekvation som är separabel och löses genom integration av båda leden. Man får

$$\ln T = -k\nu^2 \arctan t + C,$$

så T är proportionell mot $\exp(-k\nu^2 \arctan t)$. Nu kan vi ansätta

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-k(n-\frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{\ell^2} \arctan t} \sin(n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}x.$$

Initialvillkoret ger att

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}x = x$$

för $0 < x < \ell$. I detta intervall bildar funktionerna $\sin(n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}x$ ett fullständigt ortogonalsystem. De är nämligen egenfunktionerna till det reguljära Sturm-Liouville-problemet

$$f'' + \lambda f = 0, \qquad f(0) = 0 \qquad f'(\ell) = 0.$$

Att det är så såg vi när vi bestämde X nyss, μ motsvarar $-\lambda$. Man finner att $\|\sin(n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}x\|^2 = \ell/2$, och koefficienterna a_n ges av

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} x \sin(n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}x\,dx = \frac{8\ell}{\pi^2}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2},$$

det sista efter en partialintegration. Vi kan sammanfatta svaret:

$$u(x,t) = \frac{8\ell}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} e^{-k(n-\frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{\ell^2} \arctan t} \sin(n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}x.$$

Anm. Det går att få fram uttrycket för a_n ur BETA 13.1 (6) med $h = L = \ell$, om man där sätter $t = (x+\ell)/2$ för att gå över från en cosinusserie till en sinusserie.

Uppgift 3.
Systemfunktionen är $1/(1+\omega^2)$. Impulssvaret är inversa Fouriertransformen av systemfunktionen, i detta fall $\frac{1}{2}e^{-|x|}$.

Den givna utsignalen $x^{-1}\sin 2x$ har Fouriertransformen $\pi\chi_{|\omega|<2}$. Genom att dividera med systemfunktionen kommer vi till insignalens Fouriertransform, som alltså måste vara $\pi(1+\omega^2)\chi_{|\omega|<2}$. Insignalen vi söker är därför inversa Fouriertransformen av $\pi\chi_{|\omega|<2} + \pi\omega^2\chi_{|\omega|<2}$. Eftersom faktorn ω på Fouriersidan motsvarar derivering av funktionen, är detta

$$\frac{\sin 2x}{x} - \frac{d^2}{dx^2}\frac{\sin 2x}{x} = \frac{(5x^2-2)\sin 2x + 4x\cos 2x}{x^3},$$

det sista efter lite räkningar. Det är ungefär lika enkelt att i stället direkt beräkna inversa Fouriertransformen av $\pi\omega^2\chi_{|\omega|<2}$.

Svaren på frågorna blir alltså

$$\frac{(5x^2-2)\sin 2x + 4x\cos 2x}{x^3} \qquad \text{resp.} \qquad \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Uppgift 4.
Här använder man lämpligen en Laplacetransform i t-variabeln, och sätter $U(x,s) = \mathcal{L}u(x,s)$. På grund av begynnelsevillkoret $u(x,0) = \cos x$ blir då differentialekvationen

$$sU(x,s) - \cos x = U_{xx}(x,s).$$

Detta är för varje fixt $s > 0$ en ordinär differentialekvation i varabeln x med konstanta koefficienter. Motsvarande homogena ekvation $sU(x,s) = U_{xx}(x,s)$ har den allmänna lösningen $U(x,s) = A\exp(x\sqrt{s}) + B\exp(-x\sqrt{s})$ med konstanter A och B, som dock kan bero av s. För att hitta en partikulärlösning kan man ansätta en linjärkombination av $\cos x$ och $\sin x$ (eller $\exp(\pm ix)$), och man finner $U(x,s) = (s+1)^{-1}\cos x$. Vi kommer alltså fram till att den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$U(x,s) = \frac{\cos x}{s+1} + A\exp(x\sqrt{s}) + B\exp(-x\sqrt{s}).$$

Här förkastar vi termen $A\exp(x\sqrt{s})$ eftersom $\exp(x\sqrt{s})$ växer för snabbt för stora t för att vara en Laplacetransform. Observera att uppgiften är att hitta *en* lösning till problemet. Randvillkoret $u_x(0,t) = 1/\sqrt{t}$ blir Laplacetransformerat $U_x(0,s) = \sqrt{\pi/s}$, enligt BETA 13.5 L57. Genom att derivera uttrycket för U ovan (utan A-term) map. x och sen sätta $x = 0$, får vi

$$0 - B\sqrt{s} = \sqrt{\pi/s}.$$

Alltså är $B = -\sqrt{\pi}/s$, och då blir

$$U(x,s) = \frac{\cos x}{s+1} - \frac{\sqrt{\pi}}{s}\exp(-x\sqrt{s}).$$

Vi tar nu inversa Laplacetransformen av detta. BETA 13.5 L21 och L62 ger

$$u(x,s) = e^{-t}\cos x - \sqrt{\pi}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right),$$

som är den sökta lösningen.

Uppgift 5.
De tre sinusfunktionerna är sinsemellen ortogonala på $[0,\pi]$, eftersom de ingår i ortogonalsystemet $\sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$. Enligt satsen om bästa approximation är den sökta bästa approximationen detsamma som ortogonalprojektionen av f på det angivna linjära rummet och ges av de tre första termen i utvecklingen av f i sinusserie på intervallet. Enligt BETA 13.1 (11) med $L = \pi$ och $h = 1$ är denna utveckling

$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\sin 2kx.$$

Detta innebär att de udda Fourierkoefficienterna är 0, så att de tre första termerna tillsammans är $0 + \frac{8}{3\pi}\sin 2x + 0$. Svaret på uppgiften blir då $\frac{8}{3\pi}\sin 2x$.

Uppgift 6.
Vi använder cylindriska koordinater så att $u = u(r, \theta, z)$, där $0 \le r \le R_0$ och $|\theta| \le \pi$ och $0 \le z \le h$. Ekvationen blir

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0,$$

med randvärdena $u(r, \theta, 0) = 1$ då $|\theta| < \pi/2$ och $= 0$ då $\pi/2 < |\theta| \le \pi$ samt $u(r, \theta, h) = 0$ och $u(R_0, \theta, z) = 0$. Vi separerar variabler genom att ansätta $u = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$ och får

$$\frac{R'' + r^{-1}R'}{R} + r^{-2}\frac{\Theta''}{\Theta} = -\frac{Z''}{Z} = \lambda,$$

där som vanligt λ måste vara konstant. Det följer att

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} - \lambda r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta},$$

och denna kvantitet måste också vara konstant. Eftersom Θ är 2π-periodisk, måste konstantens värde vara av formen n^2 för något heltal $n \ge 0$, och Θ är en linjärkombination av $\cos nx$ och $\sin nx$. För R får vi då

$$r^2R'' + rR' - (\lambda r^2 + n^2)R = 0.$$

Om $\lambda < 0$, säg $\lambda = -\mu^2$ med $\mu > 0$, är detta Bessels differentialekvation $r^2R'' + rR' + (\mu^2r^2 - n^2)R = 0$. Dess allmänna lösning är $R(r) = aJ_n(\mu r) + bY_n(\mu r)$. Eftersom R ska vara begränsad för r nära 0, måste här b vara 0. Randvillkoret $R(R_0) = 0$ medför då att $\mu = \lambda_{kn}/R_0$, där λ_{kn}, $k = 1, 2, \dots$, som vanligt betecknar nollställena till J_n på positiva halvaxeln.

Innan vi fortsätter med detta fall, undersöker vi övriga värden på λ. Om $\lambda = \nu^2 > 0$, får vi den modifierade Besselekvationen $r^2R'' + rR' - (\nu^2r^2 + n^2)R = 0$, med allmän lösning $R(r) = aI_n(\nu r) + bK_n(\nu r)$. Här förkastar vi K_n-termen eftersom den är singulär i 0 och observerar sedan att I_n inte har några nollställen på den positiva halvaxeln. Detta fall ger alltså ingenting. För $\lambda = 0$ har vi en Eulerekvation, med allmän lösning $R(r) = ar^n + br^{-n}$ om $n > 0$. För $n = 0$ får vi i stället $R(r) = a + b\ln r$. I båda dessa fall förkastar vi först den andra termen som är obegränsad vid

0. Därefter ser vi att även den första termen måste vara 0, eftersom $R(r)$ skall ha ett nollställe.

Bara fallet $\lambda = -\mu^2 < 0$ kan alltså ge något, och där ser vi att ekvationen för Z blir $Z'' = \mu^2 Z$. Dessutom skall $Z(h) = 0$, så Z måste vara proportionell mot $\sinh \mu(z-h)$. Därmed har vi funnit de separerade lösningarna. Med värdet på μ som vi fann ovan insatt, ska vi därför ansätta

$$u(r,\theta,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{R_0}\right)(a_{kn}\cos n\theta + b_{kn}\sin n\theta)\sinh\left(\frac{\lambda_{kn}(z-h)}{R_0}\right).$$

Randvärdena för $z = 0$ ger oss nu att

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{R_0}\right)(a_{kn}\cos n\theta + b_{kn}\sin n\theta)\sinh\left(\frac{\lambda_{kn} h}{R_0}\right) = \chi_{\{|\theta|<\pi/2\}}, \tag{1}$$

detta för $|\theta| \le \pi$ och $0 < r < R_0$.

För att bestämma koefficienterna a_{kn} och b_{kn} utvecklar vi högerledet i Fourierserie. Med BETA 13.1 (1), där $L = \pi$, $h = 1$ och $\alpha = 1/2$, får man, eftersom $\sin n\pi/2 = (-1)^{m-1}$ för $n = 2m-1$ och $= 0$ för jämna n,

$$\chi_{\{|\theta|<\pi/2\}} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{2m-1}\cos(2m-1)\theta.$$

(Dessa koefficienter får man ungefär lika enkelt fram genom att integrera enligt formeln i stället för att använda tabellen.)

Dubbelsumman i vänsterledet i (1) kan vi också se som en vanlig Fourierserie där koefficienterna är summor i k, alltså så här:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{R_0}\right)\sinh\left(\frac{\lambda_{kn} h}{R_0}\right)\right)(a_{kn}\cos n\theta + b_{kn}\sin n\theta).$$

Genom att identifiera koefficienterna ser man då att alla $b_{kn} = 0$ och att $a_{kn} = 0$ för jämna $n > 0$. För $n = 0$ har man

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\lambda_{k0} r}{R_0}\right) a_{k0} \sinh\left(\frac{\lambda_{k0} h}{R_0}\right) = -\frac{1}{2}$$

och för $n = 2m - 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_{2m-1}\left(\frac{\lambda_{k,2m-1} r}{R_0}\right) a_{k,2m-1} \sinh\left(\frac{\lambda_{k,2m-1} h}{R_0}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^m}{2m-1}.$$

Nu kan man använda Besselfunktionernas ortogonalitetsegenskap (BETA 12.4 sid 275) och få

$$a_{k0} = -\frac{1}{R_0^2 J_1(\lambda_{k0}) \sinh(\lambda_{k0} h/R_0)} \int_0^{R_0} J_0\left(\frac{\lambda_{k0} r}{R_0}\right) r\, dr$$

resp.

$$a_{k,2m-1} = \frac{4(-1)^m}{\pi R_0^2 J_{2m}(\lambda_{k,2m-1})(2m-1)\sinh(\lambda_{k,2m-1} h/R_0)} \times \int_0^{R_0} J_{2m-1}\left(\frac{\lambda_{k,2m-1} r}{R_0}\right) r\, dr,$$

det sista för $m = 1, 2, \ldots$. Därmed är problemet löst. Svaret blir alltså

$$\begin{aligned} u(r,\theta,z) = &\sum_{k=1}^{\infty} a_{k0} J_0\left(\frac{\lambda_{k0} r}{R_0}\right) \sinh\left(\frac{\lambda_{k0}(z-h)}{R_0}\right) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,2m-1} J_{2m-1}\left(\frac{\lambda_{k,2m-1} r}{R_0}\right) \\ &\times \cos(2m-1)\theta \sinh\left(\frac{\lambda_{k,2m-1}(z-h)}{R_0}\right) \end{aligned}$$

med a_{kn} som ovan.

Anm. Ett alternativt sätt att beräkna a_{kn} och b_{kn} är att utnyttja att funktionerna $J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{R_0}\right) \cos n\theta$, $k \geq 1, n \geq 0$, och $J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{R_0}\right) \sin n\theta$, $k \geq 1, n \geq 1$, tillsammans bildar ett fullständigt ortogonalsystem i det viktade produktrummet

$L^2([0,R_0]\times[-\pi,\pi]; r\,drd\theta)$. Man får då uttryck för a_{kn} och b_{kn} i form av dubbelintegraler, där man kan utföra integrationen i θ. Detta leder till samma resultat som ovan.